

Ejercicios extra de electrostática y magnetostática

André Oliva

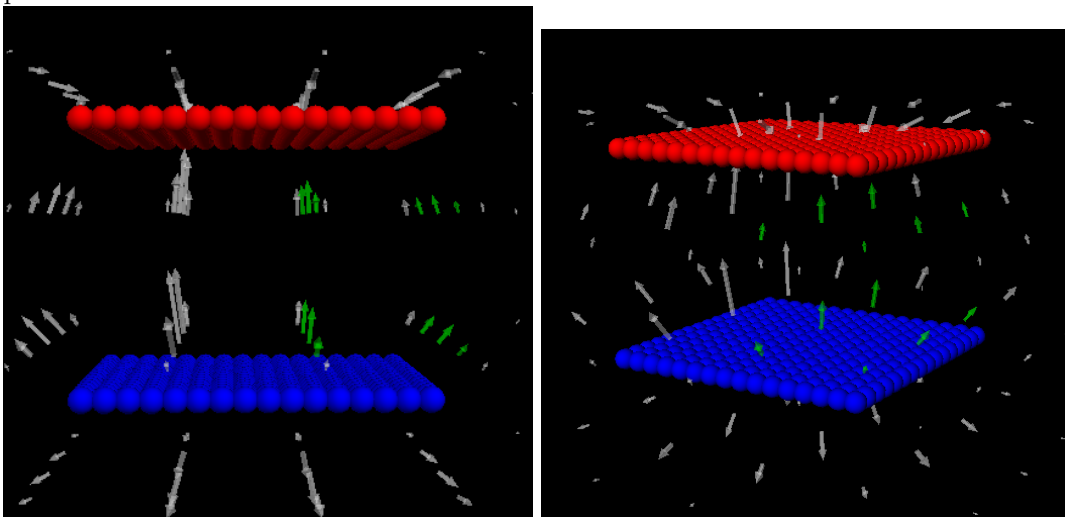
II-2014 — Teoría Electromagnética (Prof. Marcela Hernández)
Universidad de Costa Rica

1 Capacitor de placas paralelas semilleno con diel trico

Un capacitor de placas paralelas está lleno hasta la mitad con un diel trico, de forma que éste toque ambas placas.

1.1 Campo eléctrico

Utilizando la ley de Coulomb, graficamos el campo eléctrico que hay en todo el espacio, considerando las placas como finitas.



Aquí no hemos considerado la densidad de carga de polarización que ocurre en la parte del espacio coloreada en verde. Es decir, se ve nada más el campo eléctrico causado por la carga libre. Más adelante veremos que las condiciones de frontera requieren que el campo en la parte con diel trico sea igual que la parte sin él, al menos cerca del centro de las placas.

1.2 Potencial cerca de las orillas

El mapeo conforme es una forma de producir sistemas de curvas perpendiculares, tal y como ocurre con el campo eléctrico y las superficies equipotenciales. En dos dimensiones, las superficies

equipotenciales se convierten en curvas equipotenciales. Consideremos la función $f(z) = u(z) + iv(z)$ definida implícitamente por

$$iz = if(z) + e^{if(z)}; \quad ix - y = iu(z) - v(z) + e^{iu-v}$$

De aquí, podemos definir

$$x = u + e^{-v} \sin u; \quad y = v - e^{-v} \cos u$$

Consideremos una región del espacio limitada por $u = +\pi$ y $u = -\pi$. Para ajustar la separación de las placas podemos introducir parámetros de dimensión. Para $v \rightarrow \infty$, tenemos

$$x = u; \quad y = v$$

Es decir, las superficies equipotenciales cerca del centro del sistema son líneas rectas, como sabemos. Ahora, examinemos la región cerca del borde. Tomemos por ejemplo $u = \pi/2$, un punto intermedio entre las placas.

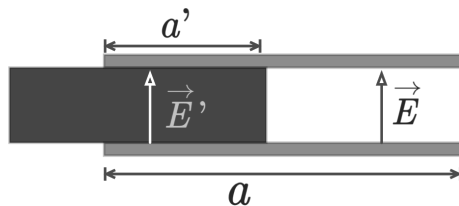
$$x = \frac{\pi}{2} + e^{-v}; \quad y = v$$

con lo que la superficie equipotencial será

$$x = \frac{\pi}{2} + e^{-y}$$

Como vemos, el potencial tiende a $\pi/2$ cuando $y \rightarrow \infty$, en el centro del capacitor. A medida que $y \rightarrow -\infty$ el potencial se va deformando debido al efecto de los ejes.

1.3 Fuerza sobre el material dieléctrico



En el centro del capacitor podemos simplemente usar la ley de Gauss para ver que

$$|\vec{\mathbf{E}}| = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_0}; \quad |\vec{\mathbf{E}}'| = \frac{4\pi\sigma'}{\epsilon}$$

La parte primada del campo eléctrico es válida en el volumen donde está el material dieléctrico. En unidades gaussianas, $\epsilon_0 = 1$. Ahora bien, en la frontera de normal $\hat{\mathbf{x}}$,

$$\hat{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}') = 0$$

con lo que, al carecer de componentes normales, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}'$. Con esto, $\sigma' = \epsilon\sigma$. Para mantener el mismo potencial, entonces, la carga Q no queda distribuida uniformemente sobre las placas. La carga total es

$$Q = \sigma'a' + \sigma(a - a') = \sigma[(\epsilon - 1)a' + a]$$

donde a es el área de la placa que está rellena de vacío, y a' , la que está rellena de dieléctrico. Con esta expresión calculamos el campo tangencial

$$E_t = 4\pi Q \frac{1}{(\epsilon - 1)a' + a}$$

La presión con la que se empujan las áreas es (la componente normal de \vec{D} es cero)

$$p = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 (\epsilon - 1) = 2\pi Q^2 \frac{\epsilon - 1}{[(\epsilon - 1)a' + a]^2}$$

Ahora, podemos incluso calcular el trabajo que hace esta presión, con $dW = pdV = pda'd$, donde d es la separación de las placas.

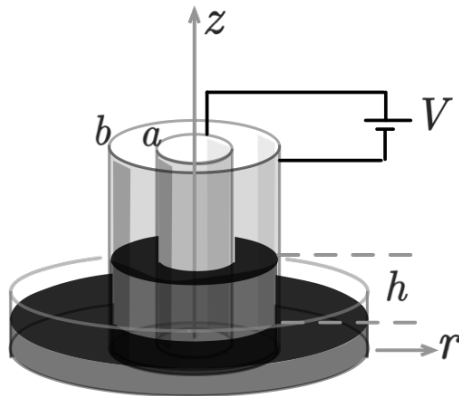
$$W = 2\pi Q^2 (\epsilon - 1) d \int_0^a \frac{da'}{[(\epsilon - 1)a' + a]^2} = 2\pi Q^2 d \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\epsilon a} \right)$$

Introduciendo las capacitancias $C = a/(4\pi d)$; $C' = \epsilon a/(4\pi d)$, entonces

$$W = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C'}$$

Dado que $\epsilon > 1$, el trabajo es positivo, y el capacitor intenta llenarse más con dieléctrico. Con base en eso, trabajaremos el problema de un capacitor cilíndrico semisumergido en líquido dieléctrico.

2 Capacitor cilíndrico semisumergido en líquido dieléctrico



Dos capacitores largos, coaxiales, cilíndricos y conductores de radios a y b , ($a < b$) se sumergen perpendicularmente a un líquido dieléctrico. Se mantiene un voltaje V entre los dos conductores. Mostrar que el líquido se levanta entre los cilindros con la altura

$$h = \frac{2V^2 \chi}{\rho g (b^2 - a^2) \ln(b/a)}$$

donde la densidad de masa del líquido es ρ , la aceleración de la gravedad es g , χ es la susceptibilidad del dieléctrico.

Vamos a utilizar conservación de la energía, concretamente, $dW_B = dW_E + dW_M$, es decir, que el trabajo de la batería W_B debe ser igual al cambio de la energía del campo W_E más el cambio en el trabajo mecánico W_M para levantar el líquido por dz . Usaremos unidades gaussianas. Supongamos que la longitud de los cilindros es l . La *diferencia* de potencial dentro del capacitor es, por ley de Gauss,

$$V = \frac{2Q}{l} \ln \frac{b}{a}$$

con lo que el campo eléctrico *entre los cilindros* será

$$E = \frac{V}{r} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1}$$

La energía electrostática está dada por

$$W_E = \frac{1}{8\pi} \int_0^l \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} d\tau$$

donde $d\tau$ es el elemento de volumen, y $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$. Dado que el cilindro está parcialmente sumergido en el líquido, debemos romper la integral en

$$W_E = \frac{\epsilon}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z dz \int_a^b E^2 r dr + \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_z^l dz \int_a^b E^2 r dr$$

Sustituyendo E^2 e integrando,

$$W_E = \frac{\epsilon V^2}{4 \ln(b/a)} z + \frac{V^2}{4 \ln(b/a)} (l - z)$$

entonces, el cambio de energía será

$$dW_E = \frac{\epsilon - 1}{4} \frac{V^2}{\ln(b/a)} (l - z)$$

Si el líquido está en contacto con el conductor, habrá un cambio de densidad de carga en el cilindro con $r = a$ de

$$\sigma = \frac{\epsilon E - E}{4\pi}$$

sustituyendo E(a),

$$\sigma = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{V}{a \ln(b/a)}$$

El trabajo de la batería es $dW_B = V dQ = V \sigma 2\pi a dz$, dado que $2\pi a dz$ es el área del cilindro interior. Sustituyendo σ ,

$$dW_B = \frac{\epsilon - 1}{2 \ln(b/a)} V^2 dz$$

Por último, el trabajo mecánico está dado por $dW_M = g z dm$ con $dm = \rho(b^2 - a^2)\pi dz$. Pero además debe ser igual a $dW_M = dW_B - dW_E$, por lo que

$$dW_M = \frac{\epsilon - 1}{4 \ln(b/a)} V^2 dz$$

por lo tanto,

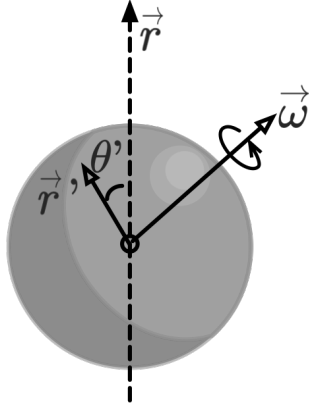
$$\int_0^h \frac{\epsilon - 1}{4 \ln(b/a)} V^2 dz = \int_0^h z g \rho (b^2 - a^2) \pi dz$$

integrando y resolviendo para h ,

$$h = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{2V^2}{\ln(b/a)(b^2 - a^2)g\rho}$$

que coincide con lo que se nos pide, puesto que $\chi = (\epsilon - 1)/(4\pi)$.

3 Cascarón esférico cargado rotando



3.1 Forma analítica

Una esfera de radio R y carga q uniformemente distribuida en su superficie rota alrededor del eje de un diámetro, con velocidad angular constante ω .

El potencial vectorial es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

La densidad de corriente está dada entonces por $\vec{j} = \rho \vec{v}$, con $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, y $\rho = \sigma \delta(r - R)$. Teniendo en cuenta esto,

$$\vec{j}(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r' - R) (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

y el vector potencial es entonces

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{q}{c4\pi R^2} \vec{\omega} \times \vec{F}(\vec{r})$$

donde

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int \frac{\delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{r}' dV'$$

Sabemos que esta última integral no puede depender ni de φ ni de θ , puesto que tiene simetría esférica. Así que $\vec{F} = F \hat{e}_r$. Vamos a hacer una elección inusual del sistema de coordenadas.

Aunque lo usual sería tomar $\vec{\omega}$ como \hat{e}_z , tomaremos el eje z' como la dirección \vec{r} , dejando libre el vector $\vec{\omega}$, con lo que el ángulo θ' es el ángulo entre \vec{r} y \vec{r}' . Con dV' en coordenadas esféricas, e integrando en φ' .

$$F = \int_0^{4\pi} d\theta' \int_0^\infty dr' \frac{\delta(r' - R)r' \cos \theta' 2\pi r'^2 \sin \theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}} = \int_0^\pi d\theta' \frac{2\pi R^3 \cos \theta' \sin \theta'}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta')^{1/2}}$$

Hacemos el cambio de variable $\cos \theta' = \xi$:

$$F = -2\pi R^3 \int_1^{-1} \frac{\xi d\xi}{(r^2 + R^2 - 2Rr\xi)^{1/2}}$$

Al evaluar la integral, obtenemos

$$F = \frac{2\pi R}{3r^2} [(r^2 + R^2 - rR)(r + R) - (r^2 + R^2 + rR)|r - R|]$$

Adentro de la esfera, $r < R$, con lo que $|r - R| = R - r$, y de allí

$$F = \frac{4\pi}{3} Rr$$

De la misma manera, afuera de la esfera,

$$F = \frac{4\pi}{3} \frac{R^4}{r^2}$$

Con lo que el potencial vectorial queda

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{q}{3cR} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r < R \\ \frac{qR^2}{3c} \vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3} & r > R \end{cases}$$

Al hacer $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, obtenemos que el campo magnético es como el de un dipolo con momento magnético

$$\vec{m} = \frac{qR^2 \vec{\omega}}{3c}$$

Este es un modelo sencillo del campo magnético terrestre.

3.2 Forma numérica

A continuación, usamos la ley de Biot-Savart para visualizar el campo magnético alrededor de una serie de cargas que rotan con rapidez uniforme, formando de forma discreta un cascarón esférico. Partes importantes del código:

```
from __future__ import division
from visual import *
from numpy import arange
```

```

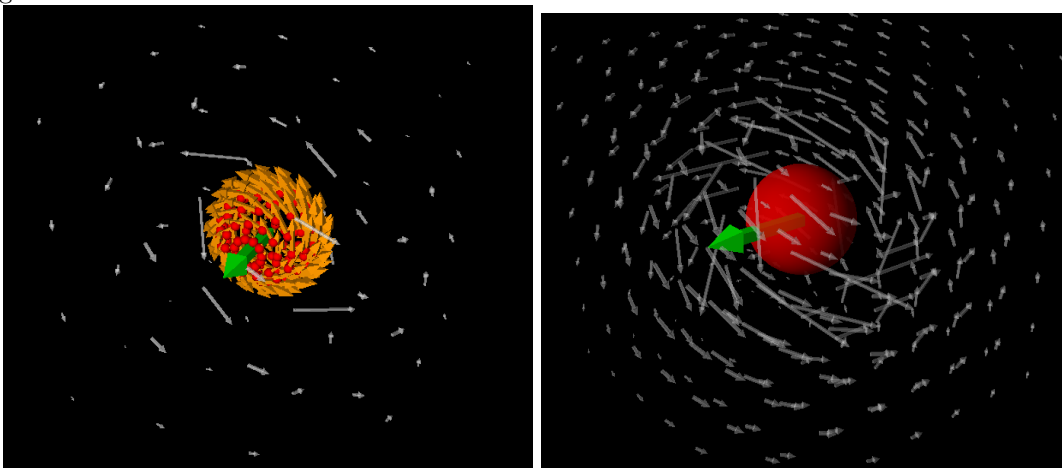
class cuerpo:
    pass
cargas = []
R = 1
mu0 = 4*pi*1e-7
omega = vector(0,0,100)

for thetap in arange(0+0.3,pi-0.3,0.3):
    for phip in arange(0,2*pi,0.3*abs(cos(thetap))+0.3):
        carga = cuerpo()
        cuerpo.charge = 1e-9
        cuerpo.pos = R*vector(sin(thetap)*cos(phip),sin(thetap)*sin(phip),cos(thetap))
        cuerpo.vel = omega.cross(cuerpo.pos)
        cargas.append(carga)

for x in arange(-3,4,1):
    for y in arange(-3,4,1):
        for z in arange(-3,4,1):
            B = vector(0,0,0)
            r = vector(x,y,z)
            runit = r/mag(r)
            for carga in cargas:
                B += mu0*carga.charge/(4*pi)*carga.vel.cross(runit/mag2(r))
            arrow(pos=r,axis=9e12*B)

```

En el tercer bloque del código generamos el sistema de cargas que forma la esfera discretizada. En el cuarto y último bloque se calcula el campo magnético como la suma de cada una de las cargas en rotación. En la primera de las dos imágenes generadas vemos la esfera discretizada (esferas pequeñas rojas), y sus velocidades (flechas anaranjadas). En la segunda imagen, el campo magnético.



4 Referencias

- Greiner, W. (1998). *Classical electrodynamics*. ISBN 0-387-94799-X
- Franklin, J. (2005). *Classical electromagnetism*. ISBN 0-8053-8733-1
- Korn, G.; Korn, T. (1968). *Mathematical handbook for scientists and engineers*. ISBN 0-486-41147-8
- Jackson, J. (1975). *Classical electrodynamics*. ISBN 0-471-43132-X
- Weber, H.; Arfken, G. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. ISBN 0-12-059877-9
- Para información sobre Python y VPython y una explicación más detallada sobre las simulaciones, <http://gandreoliva.url.ph/cursos.html>