Universidad de Costa Rica
Métodos Matemáticos de Física III

Tarea analítica #1

II-2025

Problema 1 (Boas)

(25%)

Escriba las siguientes integrales en términos de funciones Beta y luego en términos de la función Gamma.

- $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2} dx$
- $\int_0^\infty \frac{y dy}{(1+y^3)^2}$

Una vez escritas en términos de estas funciones, use scipy.special.gamma o scipy.special.beta para evaluar las integrales numéricamente. Escriba el código que usó para hacerlo y el resultado de su ejecución.

Problema 2 (Boas)

(25%)

Encuentre la circunferencia de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ con integrales elípticas.

Problema 3 (Arfken)

(25%)

Un análisis del potencial magnético vectorial de una espira de corriente conduce a la expresión

$$f(k^2) = k^{-2}\left[(2-k^2)K(k^2) - 2E(k^2)\right]$$

donde $K(k^2)$ y $E(k^2)$ son integrales elípticas completas del primer y segundo tipo. Muestre que para $k^2 \ll 1$ (equivalente a decir una espira de un radio muy grande)

$$f(k^2) \approx \pi k^2/16.$$

Problema 4 (Boas)

(25%)

Muestre que para $k = 0$,

$u = F(0,\phi) = \phi$, $\operatorname{sn} u = \sin u$, $\operatorname{cn} u = \cos u$, $\operatorname{dn} u = 1$

y para $k = 1$
$u = F(1,\phi) = \ln(\sec\phi + \tan\phi)$
$\operatorname{sn} u = \tanh u$
$\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \operatorname{sech} u$

Problemas extra (opcional)

(+30% en total, nota máxima de 130% respecto al puntaje de la tarea analítica 1 en la nota promedio del curso = 6.5 puntos en lugar de los 5 que normalmente vale la tarea analítica 1)

A. (Boas, 10%) Demuestre que al hacer el cambio de variable $x = \cos\theta$, en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]y = 0$$

esta se convierte en la ecuación diferencial de las funciones asociadas de Legendre tal y como la definimos en la tabla del PDF de Sturm-Liouville.

B. (Arfken, 10%) Derive la expansión de Jacobi-Anger

$$e^{i\rho\cos\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\rho) e^{im\rho}$$

la cual corresponde a la expansión de una onda plana en una serie de ondas cilíndricas.

C. (Arfken, 10%) Muestre que la fórmula de recurrencia

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

puede obtenerse directamente al derivar la representación integral $J_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta$.