Tarea programada 2

Métodos Matemáticos de Física III - II-2025 - Prof. Dr. André Oliva

Instrucciones

Esta tarea debe realizarse de forma indiviudal.

Para esta tarea, ud puede elegir el lenguaje de programación que prefiera pero se recomienda fuertemente el uso de Python y de Jupyter notebooks. El uso de inteligencia artificial está prohibida porque el objetivo de la tarea es ejercitar sus habilidades de solución de problemas. En un documento PDF aparte, usted debe colocar los resultados y respuestas a los enunciados de abajo, y añadir un pequeño párrafo que describa cómo lo hizo, un solo párrafo por problema. Por ejemplo, si usted define una función como esta:

```
def puntos_menos_cero(n,L):
      puntos = np.linspace(-L,L,n)
      puntos[np.isclose(puntos,0)] = np.nan
      return puntos
```

su descripción debe contener una frase que diga algo así como "hicimos una función que crea una lista de puntos y se asegura que ninguno de ellos sea cero". Atención: ese párrafo no tiene puntos, pero si no aparece no se calificarán los demás resultados del problema. Ud. debe enviar el código/códigos que utilizó para generar los resultados como archivos adjuntos a su solución. El contenido del párrafo de descripción debe ajustarse al código que usted envió. Se harán controles aleatorios de correspondencia entre lo que dice el párrafo y el código que usted envió. El objetivo de estos controles es disuadir la simple copia de resultados e incentivar que el estudiante (-ae) comprenda cómo se resuelve el problema de forma programada.

Cada problema vale el mismo puntaje.

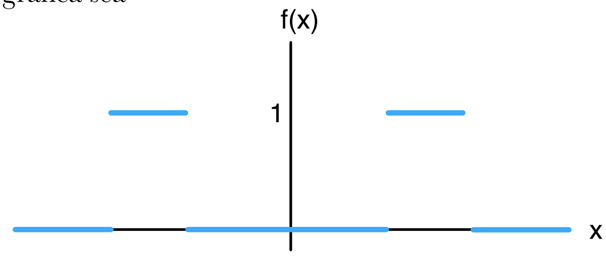
Sugerencia para empezar

Atención: práctica, no calificado

Pruebe hacer la transformada de la función con un solo escalón $f(x) = \mathrm{rect}(x)$ (cuya transformada sabemos que es $F(k) = \mathrm{sinc}(k/2)$) con fast Fourier transform (FFT). Grafique la parte real e imaginaria de la transformada. ¿Hacia adónde en esos arrays mapean las "frecuencias" (k) negativas? Tenga en cuenta este resultado a la hora de interpretar los resultados de los problemas de la tarea.

Problema 1

Considere una función cuya gráfica sea



(usted define el ancho de la parte que no es cero)

a) Calcule la transformada de Fourier numérica de $f(x)$. ¡Tenga cuidado con el intervalo de definición!
b) Grafique la función $A(k) = F(k)\bar{F}(k)$, donde $F(k) = \mathscr{F}\{f(x)\}$.
c) Grafique la función $A(k)$ cuando se cambia el ancho de ambos escalones
d) Considere una onda luminosa plana que pasa por dos rendijas. ¿Qué relación tiene la función $A(k)$ que usted calculó arriba con el patrón que la luz hace en una pared muy lejana? Revise su conocimiento de óptica ondulatoria y escriba la ecuación que usted está resolviendo con este ejercicio.

Problema 2

Calcule la transformada de Fourier numérica bidimensional de una función definida por

$$f(r) = \begin{cases} 1, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Es decir, un círculo. (Sugerencia: convierta a coordenadas Cartesianas y construya un array bidimensional, use en numpy la función ff2). Usted elige a. Grafique la función $F(\mathbf{k})\bar{F}(\mathbf{k})$, como en el ejercicio anterior. En Python, use imshow o pcolormesh. Busque en las notas de Heidy Gutiérrez la versión analítica de este ejemplo. ¿Cuáles funciones especiales salen en la versión analítica?

Problema 3

Acompañando este enunciado, usted encontrará tres archivos de texto con una columna de floats. Estos archivos contienen ondas sonoras que representan:

"signal1.txt" : la nota "la" de un instrumento musical
"vocalE.txt": una vocal humana "e"
"vocalU.txt": una vocal humana "u"

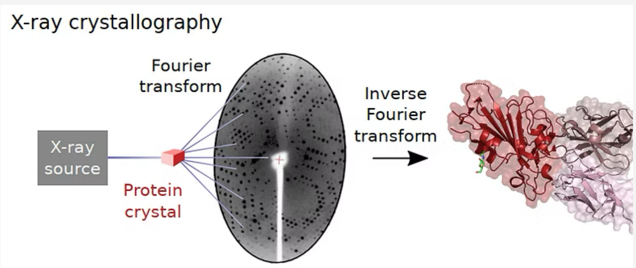
Las ondas sonoras son muestras que duran 1 segundo a una tasa de 44100 bit/s (es decir, el tiempo que corresponde a esas ondas sonoras es un array que va de 0 a 1 segundo y que tiene 44100 entradas).

a) Grafique cada onda sonora en función del tiempo
b) Calcule la transformada numérica de Fourier de cada señal.
c) ¿Cuáles frecuencias hay en cada señal?

Problema 4

Lea los siguientes párrafos de contexto:

> **Cristalografía de rayos X.** La cristalografía de rayos X se basa en pares de transformada de Fourier. Los rayos X provocan un patrón de difracción en un detector lejano, y se obtiene la transformada de Fourier del patrón del cristal. Con la transformada inversa puede obtenerse la estructura del cristal.



Interferómetros astronómicos. La interferometría en radiotelescopios permite mejorar grandemente la resolución en ondas de radio. De sus cursos de física general, recordará que la la resolución angular de un telescopio es $\sim \lambda / D$, donde D es el diámetro del radiotelescopio. A mayor diámetro, se podrán resolver detalles más pequeños. Para longitudes de onda de 1 mm, si se quisiera obtener una resolución de 0.13 arcosegundos (comparable al telescopio espacial Hubble), se necesitaría un diámetro del radiotelescopio de ~2 km. En lugar de ello, se ponen varios radiotelescopios en un *array* (tan grande incluso como la Tierra, como es el caso de la primera imagen de un agujero negro) y se mide el patrón de interferencia que hacen las ondas de radio al llegar a cada instrumento, es decir, la diferencia (muy pequeña) de tiempo de llegada de las ondas procedentes de fuentes ubicadas muy lejos. Luego hay que usar una transformada inversa de Fourier para reconstruir la imagen original.

Interferómetro ALMA y un disco protoplanetario

En este problema, usted calculará la transformada de Fourier de una imagen (2D) sencilla.

a) Construya tres arrays bidimensionales con 30 entradas en cada dirección, y llénelos de ceros.
b) Cambie las siguientes entradas a 1:
```
array1[5,5], array1[5,10]
array2[5,5], array2[25,5]
array3[10,15], array3[25,20]
```
c) Calcule la transformada bidimensional de Fourier para cada array
d) Grafique cada array original y las partes reales e imaginarias de cada array transformado (imshow o pcolormesh en Python, se recomienda el colormap "gray")
e) Basado en los resultados, conteste:
   1. ¿Qué pasa con la transformada cuando las entradas que son 1 ("puntos") se acercan o alejan?
   2. ¿Qué pasa cuando esos puntos se rotan 90º?
   3. ¿Qué pasa si esos puntos se mueven en un ángulo distinto?
   4. ¿Cuál es la relación de estos resultados con el problema 1?
f) Identifique cuál array (original o transformado) sería cuál parte de qué proceso en el caso del párrafo de contexto de cristalografía de rayos X.
g) Utilizando la función de numpy `np.convolve()` calcule la convolución discreta del `array2` con el kernel $\begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ y grafique el resultado.
   1. Cualitativamente, ¿qué hace la convolución en este caso? Frecuentemente, se necesitan limpiar los datos obtenidos con interferómetros astronómicos. Las convoluciones son una herramienta muy útil para esta tarea.
   2. ¿Cómo se podría generar un kernel así mediante una función? (Una respuesta cualitativa es suficiente).