

Integrales Elípticas

Francisco Frutos Alfaro

30 de septiembre de 2025

Integrales Elípticas

Las integrales de la forma

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

donde R es una función racional, se pueden reducir a las siguientes formas

$$\begin{aligned} I &= \int R(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2}) dx, \\ &= \int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}) dx, \\ &= \int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}) dx. \end{aligned}$$

Estas integrales por lo general pueden simplificarse empleando las siguientes substituciones:

$$\begin{array}{lll} x & = & \alpha \sinh t, \quad \text{ó} \quad x = \alpha \tan t, \\ x & = & \alpha \cosh t, \quad \text{ó} \quad x = \alpha \sec t, \\ x & = & \alpha \sin t \quad \text{ó} \quad x = \alpha \cos t. \end{array}$$

Funciones Elípticas

Si tenemos polinomios de tercer o cuarto orden

$$I = \begin{cases} \int R(x, \sqrt{P_3(x)}) dx \\ \int R(x, \sqrt{P_4(x)}) dx \end{cases}$$

donde R es una función racional,

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y

$$P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Por lo general no se pueden expresar mediante funciones elementales. Por medio de transformaciones se pueden reducir a 3 tipos de integrales, denominadas integrales elípticas.

Para transformarlas hay que encontrar por lo menos una raíz.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), & x_i, i = 1, 2, 3 & \text{raíces} \\ P_4(x) &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), & x_i, i = 1, 2, 3, 4 & \text{raíces} \end{aligned}$$

En el caso de $P_4(x)$ también es posible

$$P_4(x) = a(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2),$$

si se encuentran los coeficientes b_1, b_2, c_1, c_2 .

Los 3 tipos de integrales a los que se pueden reducir son los siguientes

$$I = \begin{cases} F(\tau, k) = \int_0^\tau [(1 - t^2)(1 - k^2t^2)]^{-1/2} dt \\ E(\tau, k) = \int_0^\tau \left(\frac{1 - k^2t^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt \\ D(\tau, k) = \int_0^\tau t^2((1 - t^2)(1 - k^2t^2))^{-1/2} dt = \frac{1}{k^2}(F(\tau, k) - E(\tau, k)) \\ \Pi(\tau, k) = \int_0^\tau \frac{1}{1 + ht^2}((1 - t^2)(1 - k^2t^2))^{-1/2} dt \end{cases}$$

donde $0 < k < 1$ y h es una constante.

La sustitución $t = \sin \varphi$ ($0 < \varphi < \pi/2$) conduce a

$$I = \begin{cases} F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ D(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{k^2} (F(\tau, k) - E(\tau, k)) \\ \Pi(\phi, k, h) = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \end{cases}$$

donde se emplea

$$dt = \cos \varphi d\varphi \quad \text{y} \quad 1 - t^2 = \cos^2 \varphi.$$

Integrales elípticas incompletas de Legendre

Integral elíptica de 1° especie

$$F(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

donde $0 < k < 1$

La transformación $x = \sin \varphi$ ($0 < \varphi < \pi/2$) conduce a

$$F(k, \phi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Integral elíptica de 2° especie

$$E(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$$

La transformación $x = \sin \varphi$ ($0 < \varphi < \pi/2$) conduce a

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Integral elíptica de 3° especie

$$\Pi(h, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

La transformación $x = \sin \varphi$ ($0 < \varphi < \pi/2$) conduce a

$$\Pi(h, k, x) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Integrales elípticas completas de Legendre

Integral elíptica de 1° especie

$$K(k) = F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 ((1 - x^2)(1 - k^2 x^2))^{-1/2} dx$$

Integral elíptica de 2° especie

$$E(k) = E = E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx$$

Integral elíptica de 3° especie

$$\Pi(h, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{1}{(1 + hx^2) [(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)]^{-1/2}} dx$$

Funciones Elípticas de Jacobi

Estas son $\text{cn } u$, $\text{sn } u$, $\text{dn } u$. Se leen s, n, u c, n, u d, n, u. A k se le llama módulo. Amplitud o función inversa

$$\varphi = \text{am}(u, k) = \text{am}(u)$$

donde

$$u = \int_0^x [(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-1/2} dx = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Se definen así

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \sin(\text{am}(u)) = \text{sn } u, \\ \cos \varphi &= \cos(\text{am}(u)) = \text{cn } u, \\ \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} &= \sqrt{1-k^2\text{sn}^2 u} = \text{dn } u = \Delta\varphi.\end{aligned}$$

Identidades y propiedades

$$\begin{aligned}\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u &= 1, \\ \text{dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u &= 1, \\ \text{dn}^2 u - k^2 \text{cn}^2 u &= k'^2, \\ \text{sn}(-u) &= -\text{sn } u, \\ \text{cn}(-u) &= \text{cn } u, \\ \text{dn}(-u) &= \text{dn } u.\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\text{sn } u &= x, \\ \text{cn } u &= \sqrt{1-x^2}, \\ \text{dn } u &= \sqrt{1-k^2x^2}.\end{aligned}$$

Las derivadas son

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\operatorname{dn} u} \\
\frac{d\varphi}{du} &= \operatorname{dn} u \\
\frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \frac{d\varphi}{du} \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi = \cos \varphi \frac{d\varphi}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\
\frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= \frac{d\varphi}{du} \frac{d}{d\varphi} \cos \varphi = -\sin \varphi \operatorname{dn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\
\frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= \frac{d}{du} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} = -\frac{2k^2}{2 \operatorname{dn} u} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.
\end{aligned}$$

Algunos valores especiales son

$$\begin{aligned}
\operatorname{am}(0) &= 0, \\
\operatorname{sn}(0) &= \sin(0) = 0, \\
\operatorname{cn}(0) &= \cos(0) = 1, \\
\operatorname{dn}(0) &= 1, \\
\operatorname{sn} K &= 1, \\
\operatorname{cn} K &= 0, \\
\operatorname{dn} K &= k', \\
\operatorname{sn}(K + iK') &= \frac{1}{k}, \\
\operatorname{cn}(K + iK') &= -\frac{ik'}{k}, \\
\operatorname{dn}(K + iK') &= 0.
\end{aligned}$$

Integrales

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sn} u \, du &= \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u} \right), \\
\int \operatorname{cn} u \, du &= \frac{1}{k} \arccos(\operatorname{dn} u), \\
\int \operatorname{dn} u \, du &= \arcsin(\operatorname{sn} u).
\end{aligned}$$

Fórmulas de adición para los ángulos es simple

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Sin embargo la suma de funciones elípticas no es tan sencilla. Se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u + v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{cn}(u + v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{dn}(u + v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.\end{aligned}$$

Demostraremos una de estas indentidades. Sea $\alpha = u + v$ una constante. Entonces

$$d\alpha = du + dv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{du} = -1.$$

Sean

$$S_1 = \operatorname{sn} u \quad \text{y} \quad S_2 = \operatorname{sn} v$$

La derivada con respecto a u se denotara por un punto con se hace en mecánica por simplicación. Así

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{dv}{du} = -1 \\ \dot{S}_1 &= \frac{dS_1}{du} = \frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ \dot{S}_1^2 &= \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) = (1 - S_1^2)(1 - k^2 S_1^2) \quad (1) \\ \dot{S}_2 &= \frac{dS_2}{du} = \frac{dv}{du} \frac{dS_2}{dv} \\ \frac{dS_2}{dv} &= \frac{d}{dv} \operatorname{sn} v = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \\ \dot{S}_2 &= -\frac{dS_2}{dv} = -\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \\ \dot{S}_2^2 &= (1 - S_2^2)(1 - k^2 S_2^2) \quad (2)\end{aligned}$$

Derivamos

$$\begin{aligned}
2\dot{S}_1 \frac{d\dot{S}_1}{du} &= -2S_1 \frac{dS_1}{du} (1 - k^2 S_1^2) + (1 - S_1^2) \left(-2k^2 S_1 \frac{dS_1}{du} \right) \\
&= -2S_1 \frac{dS_1}{du} [1 - k^2 S_1^2 + k^2 (1 - S_1^2)] = -2S_1 \dot{S}_1 (1 + k^2 - 2k^2 S_1^2) \\
\ddot{S}_1 &= -S_1 (1 + k^2 - 2k^2 S_1^2) = \frac{d^2}{du^2} \operatorname{sn} u
\end{aligned} \tag{3}$$

De igual forma

$$\ddot{S}_2 = -S_2 (1 + k^2 - 2k^2 S_2^2) = \frac{d^2}{du^2} \operatorname{sn} v \tag{4}$$

Ahora multiplicamos las ecuaciones (3) y (4) por S_2 y S_1 respectivamente

$$\begin{aligned}
S_2 \ddot{S}_1 &= -S_1 S_2 (1 + k^2 - 2k^2 S_1^2) \\
S_1 \ddot{S}_2 &= -S_1 S_2 (1 + k^2 - 2k^2 S_2^2)
\end{aligned}$$

Entonces, la resta de estas últimas ecuaciones es

$$S_2 \ddot{S}_1 - S_1 \ddot{S}_2 = 2k^2 S_1 S_2 (S_1^2 - S_2^2) \tag{5}$$

Ahora multiplicamos las ecuaciones (1) y (2) por S_1^2 y S_2^2 respectivamente

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1^2 S_2^2 &= S_2^2 (1 - S_1^2) (1 - k^2 S_1^2) \\
\dot{S}_2^2 S_1^2 &= S_1^2 (1 - S_2^2) (1 - k^2 S_2^2)
\end{aligned}$$

Entonces, la resta de estas últimas ecuaciones es

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1^2 S_2^2 - \dot{S}_2^2 S_1^2 &= (1 - S_1^2) (S_2^2 - k^2 S_1^2 S_2^2) - (1 - S_2^2) (S_1^2 - k^2 S_1^2 S_2^2) \\
&= S_2^2 - k^2 S_1^2 S_2^2 - S_1^2 S_2^2 + k^2 S_1^4 S_2^2 - S_1^2 + k^2 S_1^2 S_2^2 + S_1^2 S_2^2 - k^2 S_1^2 S_2^4 \\
&= (S_2^2 - S_1^2) (1 - k^2 S_1^2 S_2^2)
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora dividimos la (5) entre la (6)

$$\frac{\ddot{S}_1 \dot{S}_2 - \ddot{S}_2 \dot{S}_1}{\dot{S}_1^2 S_2^2 - \dot{S}_2^2 S_1^2} = -\frac{2k^2 S_1 S_2}{(1 - k^2 S_1^2 S_2^2)}$$

Sean

$$q_1 = \ln(1 - k^2 S_1^2 S_2^2) \quad \text{y} \quad q_2 = \ln(\dot{S}_1 S_2 - \dot{S}_2 S_1)$$

Vamos a derivar ambas expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{du} &= \frac{1}{1 - k^2 S_1^2 S_2^2} \frac{d}{du} (1 - k^2 S_1^2 S_2^2) \\
&= \frac{1}{1 - k^2 S_1^2 S_2^2} (-2k^2 S_1 \dot{S}_1 S_2^2 - 2k^2 S_1^2 S_2 \dot{S}_2) \\
&= \frac{-2k^2 S_1 S_2}{1 - k^2 S_1^2 S_2^2} (\dot{S}_1 S_2 + S_1 \dot{S}_2) \\
&= \frac{\ddot{S}_1 \dot{S}_2 - \ddot{S}_2 \dot{S}_1}{\dot{S}_1^2 S_2^2 - \dot{S}_2^2 S_1^2} (\dot{S}_1 S_2 + S_1 \dot{S}_2) \\
&= \frac{\dot{S}_1 \dot{S}_2 - \dot{S}_2 \dot{S}_1}{\dot{S}_1 S_2 - \dot{S}_2 S_1} \\
\frac{dq_2}{du} &= \frac{\dot{S}_1 \dot{S}_2 - \dot{S}_2 \dot{S}_1}{\dot{S}_1 S_2 - \dot{S}_2 S_1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} (q_2 - q_1) &= 0 \Rightarrow q_2 - q_1 = C_0 \\
\ln \left(\frac{\dot{S}_1 S_2 - \dot{S}_2 S_1}{1 - k^2 S_1^2 S_2^2} \right) &= C_0 = \ln C
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{S}_1 S_2 - \dot{S}_2 S_1}{1 - k^2 S_1^2 S_2^2} &= C \\
C &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\
&= f(u + v) = \operatorname{sn}(u + v) \\
\operatorname{sn} v &= 0 \Rightarrow f(u) = \operatorname{sn} u \\
\operatorname{sn} u &= 0 \Rightarrow f(v) = \operatorname{sn} v
\end{aligned}$$

Igualmente se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
\operatorname{cn}(u + v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\
\operatorname{dn}(u + v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}
\end{aligned}$$

Reducción a integrales elípticas

Sea

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

Primero encontramos un cero del polinomio. Sea x_0 es un cero de $f(x)$.

$$\Rightarrow f(x_0) = 0.$$

Ahora veamos las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} (t - x_0)^2 &= t^2 - 2x_0t + x_0^2 \\ (t - x_0)^3 &= (t - x_0)(t^2 - 2x_0t + x_0^2) \\ &= t^3 - 2x_0t^2 + x_0^2t - x_0t^2 + 2x_0^2t - x_0^3 \\ &= t^3 - 3x_0t^2 + 3x_0^2t - x_0^3 \\ (t - x_0)^4 &= (t^2 - 2x_0t + x_0^2)(t^2 - 2x_0t + x_0^2) \\ &= t^4 - 2x_0t^3 + x_0^2t^2 - 2x_0t^3 + 4x_0^2t^2 - 2x_0^3t + x_0^2t^2 - 2x_0^3t + x_0^4 \\ &= t^4 - 4x_0t^3 + 6x_0^2t^2 - 4x_0^3t + x_0^4 \end{aligned}$$

Hagamos la siguiente transformación $x \rightarrow t - x_0$ tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0(t - x_0)^4 + 4A_1(t - x_0)^3 + 6A_2(t - x_0)^2 + 4A_3(t - x_0) \\ &= A_0t^4 + 4(A_1 - A_0x_0)t^3 + 6(A_0x_0^2 - 2A_1x_0 + A_2)t^2 \\ &\quad + 4(A_3 - A_0x_0^3 + 3A_1x_0^2 - 3A_2x_0)t - 4A_3x_0 + x_0^4A_0 - 4A_1x_0^3 + 6A_2x_0^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ a_1 &= A_1 - A_0x_0 \\ \Rightarrow A_1 &= a_1 + A_0x_0 = a_1 + a_0x_0 \\ a_2 &= A_0x_0^2 - 2A_1x_0 + A_2 \\ \Rightarrow A_2 &= a_2 + 2A_1x_0 - A_0x_0^2 \\ &= a_2 + 2(a_1 + a_0x_0)x_0 - a_0x_0^2 = a_2 + 2a_1x_0 + a_0x_0^2 \\ a_3 &= A_3 - A_0x_0^3 + 3A_1x_0^2 - 3A_2x_0 \\ \Rightarrow A_3 &= a_3 + A_0x_0^3 - 3A_1x_0^2 + 3A_2x_0 \\ &= a_3 + a_0x_0^3 - 3(a_1 + a_0x_0)x_0^2 + 3(a_2 + 2a_1x_0 + a_0x_0^2)x_0 \\ A_3 &= a_3 + 3a_2x_0 + 3a_1x_0^2 + a_0x_0^3 \\ a_4 &= A_0x_0^4 - 4A_1x_0^3 + 6A_2x_0^2 - 4A_3x_0 \\ &= a_0x_0^4 - 4(a_1 + a_0x_0)x_0^3 + 6(a_2 + 2a_1x_0 + a_0x_0^2)x_0^2 - 4(a_3 + 3a_2x_0 + 3a_1x_0^2 + a_0x_0^3)x_0 \\ &= -a_0x_0^4 - 4a_1x_0^3 - 6a_2x_0^2 - 4a_3x_0 \\ \Rightarrow f(x_0) &= a_0x_0^4 + 4a_1x_0^3 + 6a_2x_0^2 + 4a_3x_0 + a_4 = 0 \end{aligned}$$

Sean

$$\tau = (t - x_0)^{-1} \quad \xi = (x - x_0)^{-1}$$

La derivada de esta transformación es

$$d\tau = -\frac{dt}{(t - x_0)^2} = -\tau^2 dt \Rightarrow dt = -\frac{d\tau}{\tau^2}$$

Entonces

$$f(\tau) = (t - x_0)^4 (A_0 + 4A_1\tau + 6A_2\tau^2 + 4A_3\tau^3)$$

$$\tau^4 f(\tau) = 4A_3\tau^3 + 6A_2\tau^2 + 4A_1\tau + A_0 = P_3(\tau)$$

Forma Normal de Weierstrass

Sea

$$A_3\tau = \zeta - \frac{A_2}{2}$$

Entonces

$$\tau = \frac{\zeta}{A_3} - \frac{A_2}{2A_3} = \frac{1}{A_3} \left(\zeta - \frac{A_2}{2} \right)$$

La derivada de τ es

$$d\tau = \frac{d\zeta}{A_3}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{1}{A_3^2} \left(\zeta^2 - A_2\zeta + \frac{A_2^2}{4} \right) \\ \tau^3 &= \frac{1}{A_3^3} \left(\zeta - \frac{A_2}{2} \right) \left(\zeta^2 - A_2\zeta + \frac{A_2^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{A_3^3} \left(\zeta^3 - \frac{3}{2}A_2\zeta^2 + \frac{3}{4}A_2^2\zeta - \frac{A_2^3}{8} \right) \\ P_3(\tau) &= \frac{4}{A_3^3} \left(\zeta^3 - \frac{3}{2}A_2\zeta^2 + \frac{3}{4}A_2^2\zeta - \frac{A_2^3}{8} \right) \\ &+ \frac{6A_2}{A_3^2} \left(\zeta^2 - A_2\zeta + \frac{A_2^2}{4} \right) + \frac{4A_1}{A_3} \left(\zeta - \frac{A_2}{2} \right) + A_0 \\ P_3(\zeta) &= \frac{1}{A_3^3} \left(4\zeta^3 + 3A_2^2\zeta - \frac{A_2^3}{2} - 6A_2\zeta^2 + 6A_2\zeta^2 - 6A_2^2\zeta + \frac{6}{4}A_2^3 + 4A_1A_3\zeta - 2A_1A_2A_3 + A_0A_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{A_3^3} (4\zeta^3 - (3A_2^2 - 4A_1A_3)\zeta + (A_2^3 - 2A_1A_2A_3 + A_0A_3^2)) \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} g_2 &= 3A_2^2 - 4A_1A_3 \\ g_3 &= 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$P_3(\zeta) = \frac{1}{A_3^3} (4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3)$$

donde

$$\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \end{aligned}$$

Ahora la integral

$$I = \int_{x_0}^x \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$$

donde $f(x_0) = 0$ y

$$f(x) = P_4(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

Se convierte en

$$I = \int_{\xi}^{\infty} (4A_3 \tau^3 + 6A_2 \tau^2 + 4A_1 \tau + A_0)^{-1/2} d\tau$$

Forma Normal de Weierstrass

$$I = \int_s^{\infty} (4\xi^3 - g_2 \xi - g_3)^{-1/2} d\xi$$

Ahora vamos a demostrar como pasar a la forma de Legendre. Primero tenemos que

$$S(t) = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3) = 4t^3 - g_2 t - g_3.$$

Los coeficientes cumplen con

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ 4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) &= -g_2 \\ 4e_1 e_2 e_3 &= g_3 \end{aligned}$$

Sea

$$t = e_3 + (e_1 - e_3) \frac{1}{z^2}$$

La derivada de t es

$$dt = 2(e_3 - e_1) \frac{1}{z^3}$$

La función se convierte en

$$\begin{aligned} S(t) &= (e_2 - e_3)z^4 - (e_1 + e_2 - 2e_3)z^2 + e_1 - e_3 \\ &= (e_1 - e_3) \left(k^2 z^4 - \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)}{e_1 - e_3} z^2 + 1 \right) = (e_1 - e_3)(1 - z^2)(1 - k^2 z^2), \end{aligned}$$

donde

$$k^2 = \frac{(e_2 - e_3)}{(e_1 - e_3)}.$$

Finalmente

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{S(t)}} = -\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

Otra forma

Sea

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

donde $x_1 > x_2, x_1 > x_3 > x_4, x_3 > x_2 \in \mathbb{R}$.

La siguiente transformación tambien nos conduce a una integral elíptica

$$x = x_1 \left(\frac{1 - \alpha_1^2 \sin^2 \beta}{1 - \alpha_2^2 \sin^2 \beta} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= 1 + \frac{x_4}{\gamma^2 x_1} = \frac{x_3(x_1 - x_4)}{x_1(x_3 - x_4)} = \frac{x_3}{x_1} \alpha_2^2 > 0, \\ \alpha_2^2 &= 1 + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4} > 0, \\ \gamma^2 &= \frac{x_3 - x_4}{x_1 - x_3} > 0, \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 &= \left(\frac{x_3}{x_1} - 1 \right) \alpha_2^2 < 0. \end{aligned}$$

La derivada de x es

$$dx = -2 \frac{x_1(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sin \beta \cos \beta}{(1 - \alpha_2^2 \sin^2 \beta)^2} d\beta$$

Sustituimos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \\ &= 2\eta \int \frac{\cos \beta \sin \beta d\beta}{\sqrt{a((x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \beta}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{\sqrt{a((x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \sin^2 \beta)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}} \int \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \\ &= F(\beta, k), \end{aligned}$$

donde

$$\eta = \frac{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)|x_3 - x_4|}{(x_3 - x_4)|x_1 - x_3||x_1 - x_4|} = 1, \quad k^2 = \frac{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)} > 0, \quad x_1 > x_2, x_1 > x_3 > x_4, x_3 > x_2.$$

Periodos

Las funciones elípticas son doblemente periódicas, es decir, tienen dos periodos:

$$T = 4K, \quad T' = 4iK'$$

Ahora

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sn} K &= 1, \\ \operatorname{cn} K &= 0, \\ \operatorname{dn} K &= k',\end{aligned}$$

donde

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+K) &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{cn}(u+K) &= -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{dn}(u+K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{sn}(u+2K) &= -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K) &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2K) &= \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{sn}(u+4K) &= \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+4K) &= \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+4K) &= \operatorname{dn} u.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Rightarrow T = 4K$$

Ahora veamos el otro periodo

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_0^2t^2)}}$$

Sea

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - k_0^2 t^2}}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} dx &= -(1 - k_0^2 t^2)^{-3/2} k_0^2 t dt = -k_0^2 t x^3 dt, \\ x^2(1 - k_0^2 t^2) &= 1, \\ 1 - k_0^2 t^2 &= \frac{1}{x^2}, \\ 1 - \frac{1}{x^2} &= k_0^2 t^2, \\ k_0^2 t^2 &= \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\frac{(1 - x^2)}{x^2}, \\ k_0 t &= i \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \\ t &= i \frac{\sqrt{1 - x^2}}{k_0 x}, \\ 1 - t^2 &= \frac{1 - (k_0')^2 x^2}{k_0^2 x^2}, \\ \sqrt{1 - t^2} &= \frac{\sqrt{1 - (k_0')^2 x^2}}{k_0^2 x} = \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{k_0 x}. \end{aligned}$$

Entonces

$$K' = -i \int_1^{1/k_0'} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - (k_0')^2 x^2)}}$$

donde

$$k_0' = \sqrt{1 - k_0^2} = k$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} K' &= -i \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \\ iK' &= \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \\ K &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \\ K + iK' &= \int_0^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \end{aligned}$$

Las funciones elípticas son

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}(K + iK') &= \frac{1}{k}, \\
 \operatorname{cn}(K + iK') &= -\frac{ik'}{k}, \\
 \operatorname{dn}(K + iK') &= 0, \\
 \operatorname{sn}(u + K + iK') &= \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u}, \\
 \operatorname{cn}(u + K + iK') &= -\frac{ik'}{k \operatorname{cn} u}, \\
 \operatorname{dn}(u + K + iK') &= \frac{ik' \operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} u}.
 \end{aligned}$$

Ahora empleamos

$$u + iK' = (u + K + iK') - K$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}(u + iK') &= \frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \\
 \operatorname{cn}(u + iK') &= -\frac{i \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}, \\
 \operatorname{dn}(u + iK') &= -\frac{i \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \\
 \operatorname{sn}(u + 2iK') &= \operatorname{sn} u, \\
 \operatorname{cn}(u + 2iK') &= -\operatorname{cn} u, \\
 \operatorname{dn}(u + 2iK') &= -\operatorname{dn} u, \\
 \operatorname{sn}(u + 4iK') &= \operatorname{sn} u, \\
 \operatorname{cn}(u + 4iK') &= \operatorname{cn} u, \\
 \operatorname{dn}(u + 4iK') &= \operatorname{dn} u.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Rightarrow T' = 4iK'$$

Transformación de Landen

La transformación de Landen es una fórmula matemática propuesta por John Landen que permite relacionar integrales elípticas de un cierto parámetro con integrales elípticas de otro parámetro diferente. Su utilidad principal radica en la evaluación eficiente de estas integrales.

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

$$k'_1 = \frac{1-k}{1+k}$$

$$K_1 = (1+k)K$$

$$K'_1 = \frac{1}{2}(1+k)K'$$

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{(1+k)\operatorname{sn}(u_1, k_1)}{1+k\operatorname{sn}^2(u_1, k_1)}$$

$$u_1 = (1+k)u$$

Transformación de Gauß

Gauß redescubrió la transformación de Landen. por eso son similares.

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

$$k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(1 + k')K$$

$$K'_1 = (1 + k')K'$$

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{(1 + k') \operatorname{sn}(u_1, k_1) \operatorname{cn}(u_1, k_1)}{\operatorname{dn}(u_1, k_1)}$$

$$u_1 = (1 + k')u$$

Aplicaciones

Problema 5.8.1 Arfken–Weber Quinta edición

La elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ puede ser representada parametricamente por $x = a \sin \varphi, y = b \cos \varphi$. Muestre que la longitud de arco dentro del primer cuadrante es

$$a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

donde $0 \leq k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \leq 1$.

Solución

La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La transformación es

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi$$

El elemento de arco está dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

La deriva de las coordenadas son

$$\frac{dx}{d\phi} = a \cos \varphi, \quad \frac{dy}{d\phi} = -b \sin \varphi$$

Sustituimos en el ds

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi} \right)^2 \right] d\phi^2 \\ &= (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\phi^2 = a^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) d\phi^2, \end{aligned}$$

donde

$$k^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Entonces

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = aE(\varphi, k).$$

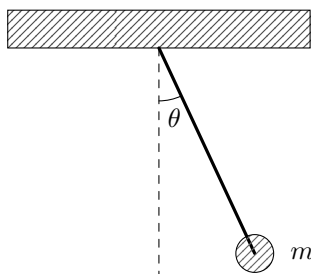
Funciones Elípticas: Problemas

Francisco Frutos Alfaro

30 de septiembre de 2025

Péndulo Simple

Demostrar que el periodo de un péndulo simple se puede expresar como una función elíptica $F(k, \varphi)$.



Solución:

Las fuerzas implicadas son la tensión T en la cuerda y el peso de la masa m

$$F_1 = T = mg \cos \theta, \quad F_2 = mg \sin \theta$$

La velocidad y la aceleración son respectivamente

$$v = l\dot{\theta}, \quad a = l\ddot{\theta}$$

Ahora

$$\begin{aligned} F &= ma = -F_2 = -ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\omega^2 \sin \theta \end{aligned}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Multiplicamos por $2\dot{\theta}$ la ecuacion de movimiento

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta}^2 = -2\omega^2\dot{\theta}\sin\theta$$

Integramos

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 \cos\theta + C$$

Las condiciones iniciales son $\theta = \alpha$, $\dot{\theta} = 0$

Entonces

$$2\omega^2 \cos\alpha + C = 0 \Rightarrow C = -2\omega^2 \cos\alpha$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 &= 2\omega^2(\cos\theta - \cos\alpha) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} \\ \Rightarrow dt &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}\end{aligned}$$

Integramos de 0 a T

$$\int_0^T dt = T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

Usamos el ángulo medio

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\left(\frac{\theta+\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\alpha &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\theta - \cos\alpha &= 2\left[\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Entonces

$$T = \sqrt{\frac{l}{4g}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Potencial vectorial de un lazo circular de corriente

Francisco Frutos Alfaro

September 30, 2025

Problema 5.8.4 Arfken–Weber Quinta edición

El vector potencial para un lazo de radio a por el cual circula una corriente I está dado por

$$A_\phi = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi'}}$$

Demostar que este vector potencial toma la siguiente forma al usar integrales elípticas completas:

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right]$$

donde K y E son integrales elípticas completas de primera y segunda especie respectivamente.

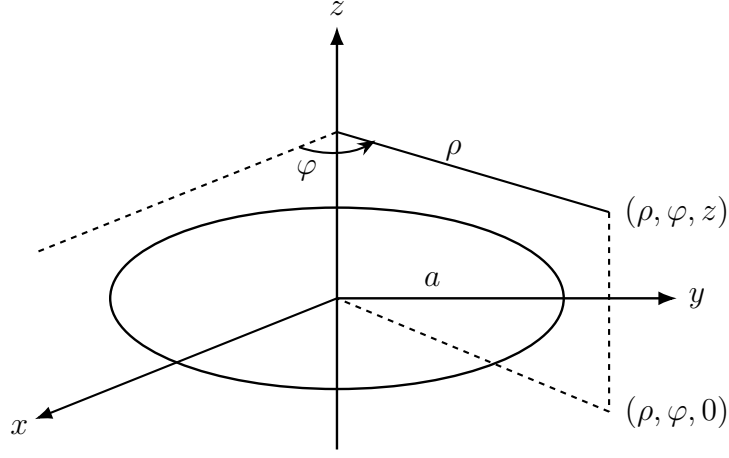
Solución:

Esta parte del problema no aparece en el enunciado del problema. Se agrega por completitud.

La fórmula para obtener el vector potencial es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

En el caso de un anillo la densidad de corriente está dada por



$$J_\phi = \frac{I}{a} \sin \theta' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)$$

Vectorialmente tenemos que

$$\mathbf{J} = J_\phi \boldsymbol{\phi} = -J_\phi \sin \phi' \mathbf{i} + J_\phi \cos \phi' \mathbf{j} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j}$$

El término J_x no contribuye pues se anula en la integración

Los vectores de posición $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ están dados por

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}' = (x', y', z')$$

Así, su diferencia es

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k} \\ &= (r \sin \theta \cos \phi - r' \sin \theta' \cos \phi')\mathbf{i} + (r \sin \theta \sin \phi - r' \sin \theta' \sin \phi')\mathbf{j} \\ &\quad + (r \cos \theta - r' \cos \theta')\mathbf{k} \end{aligned}$$

Entonces la norma es

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + (r')^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos \phi \cos \phi' \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + (r')^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \sin \phi' \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta + (r')^2 \cos^2 \theta' - 2rr' \cos \theta \cos \theta' \\ &= r^2 + (r')^2 - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') - 2rr' \cos \theta \cos \theta' \end{aligned}$$

Para $\phi = 0$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' - 2rr' \cos \theta \cos \theta'$$

En cilíndricas

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad \rho = r \sin \theta$$

Ahora sustituimos

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu_0}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{I \sin \theta' \cos \phi' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' - 2rr' \cos \theta \cos \theta'}} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{(r')^2 \sin^2 \theta' \cos \phi' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' - 2rr' \cos \theta \cos \theta'}} dr' d\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi'}} \end{aligned}$$

El $\delta(\cos \theta')$ hace que el ángulo sea $\theta' = \pi/2$ al integrar

$$\int_0^{\pi/2} f(\theta) \delta(\cos \theta) d\theta = f(\pi/2)$$

El $\delta(r' - a)$ hace que $r' = a$ al integrar

$$\int_0^\infty f(r) \delta(r - a) dr = f(a)$$

Ahora pasamos a cilíndricas (Este es el inicio del problema de Arfken–Weber)

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi'}} \\ &= \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi'}} \end{aligned}$$

Sea

$$\phi' = \alpha = \pi - 2\beta, \quad d\alpha = -2d\beta$$

Tenemos que

$$\alpha = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2, \quad \alpha = \pi \Rightarrow \theta = 0$$

Además

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\pi - 2\beta) \\ &= \cos(\pi) \cos(2\beta) + \sin(\pi) \sin(2\beta) = -\cos(2\beta) \\ &= -(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = -(1 - 2 \sin^2 \beta) = 2 \sin^2 \beta - 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A_\phi &= -\frac{\mu_0 a I}{\pi} \int_{\pi/2}^0 \frac{(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho(1 - 2 \sin^2 \beta)}} \\ &= \frac{\mu_0 a I}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho(1 - 2 \sin^2 \beta)}} \\ &= \frac{\mu_0 a I}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{(a + \rho)^2 + z^2 - 4a\rho \sin^2 \beta}} \\ &= \frac{\mu_0 a I}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{(a + \rho)^2 + z^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \\ &= \frac{\mu_0 a I}{\pi \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \end{aligned}$$

donde

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2}$$

Continuamos con la integral

$$\begin{aligned}
A_\phi &= \frac{\mu_0 a I}{\pi k^2 \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{k^2 (2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \\
&= \frac{\mu_0 a I}{\pi k^2 \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 - k^2 - (2 - 2k^2 \sin^2 \beta)) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \\
&= \frac{\mu_0 a I}{\pi k^2 \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(2 - k^2)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2 \frac{(1 - k^2 \sin^2 \beta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right] d\beta \\
&= \frac{\mu_0 a I}{\pi k^2 \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \left[(2 - k^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \right] \\
&= \frac{\mu_0 a I}{\pi k^2 \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} [(2 - k^2) F(k, \pi/2) - 2E(k, \pi/2)] \\
&= \frac{2\mu_0 a I}{\pi k^2 \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \\
&= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right]
\end{aligned}$$