

Funciones de Legendre y sus Aplicaciones Físicas

Monografía Completa, Demostraciones Analíticas y Problemas
Resueltos

Francisco Frutos Alfaro

Agosto de 2026

Índice

1	Introducción y Polinomios de Legendre (Primera Especie)	4
1.1	Ecuación Diferencial Ordinaria de Legendre	4
1.2	Fórmula Generalizada de Rodrigues	4
1.3	Primeros Polinomios de Legendre	5
1.4	Ecuación de Legendre en Forma Autoadjunta	5
1.5	Propiedades de Paridad	6
2	Fórmulas de Recurrencia de los Polinomios de Legendre	7
2.1	Relaciones Fundamentales de Recurrencia	7
3	Ortogonalidad y Normalización de los Polinomios de Legendre	8
3.1	Teorema de Ortogonalidad	8
3.2	Demostración Analítica de la Ortogonalidad	8
3.3	Cálculo de la Norma mediante la Función Generadora	9
3.4	Desarrollo en Serie de Legendre	10
3.5	Identidad de Parseval para Series de Legendre	10
3.6	Deducción de Relaciones de Recurrencia utilizando la Función Generadora	10
3.6.1	Derivando respecto a t	10
3.6.2	Derivando respecto a x	11
4	Funciones Asociadas de Legendre de Primera Especie	12
4.1	Ecuación Asociada de Legendre	12
4.2	Definiciones y la Fase de Condon-Shortley	12
4.3	Fórmula de Rodrigues para Funciones Asociadas	13
4.4	Demostración Analítica de que $P_\ell^m(x)$ Satisface la Ecuación Asociada	13
4.5	Ejemplos de Funciones Asociadas	15
4.5.1	Caso $\ell = 1$	15
4.5.2	Caso $\ell = 2$	15
5	Ortogonalidad y Normalización de las Funciones Asociadas	16
5.1	Ortogonalidad para un Orden m Fijo	16
5.2	Deducción Analítica de la Norma de las Funciones Asociadas	16
5.2.1	Cálculo del Término Base I_m^m	17
5.3	Otras Relaciones de Ortogonalidad	18
6	Funciones de Legendre de Segunda Especie ($Q_\ell(x)$)	19
6.1	Reducción de Orden (Método de d'Alembert)	19
6.2	La Función de Orden Cero $Q_0(x)$	19
6.3	Primeras Funciones de Segunda Especie para $ x < 1$	20
6.4	Relaciones de Recurrencia para las Funciones de Segunda Especie	20
6.5	Wronskiano de P_ℓ y Q_ℓ	20
6.6	Funciones Asociadas de Segunda Especie	20
7	Funciones de Segunda Especie en el Dominio Radial Exterior ($x > 1$)	21
7.1	Forma Real de las Funciones de Segunda Especie para $x > 1$	21
7.2	Comportamiento Asintótico	21
7.3	Funciones Asociadas de Segunda Especie para $x > 1$	22
7.4	Ejemplo Detallado: Cálculo Analítico de $Q_1^1(x)$ para $x > 1$	22
7.4.1	Propiedades Singulares y Asintóticas de $Q_1^1(x)$	22

8	Otras Propiedades y Representaciones Integrales	23
8.1	Polinomios Corridos de Legendre	23
8.2	Representación Integral de Schläfli	23
8.3	Teorema de la Adición	24
8.4	Polinonios Ultraesféricos (Gegenbauer)	24
9	Aplicaciones Físicas de las Funciones de Legendre	25
9.1	La Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas	25
9.1.1	Separación Radial	25
9.1.2	Separación Azimutal	25
9.1.3	Ecuación Angular Polar	26
9.1.4	Armónicos Esféricos	26
9.1.5	Solución General	26
9.2	Relación con la Mecánica Cuántica: El Momento Angular	27
9.2.1	Átomo de Hidrógeno	27
9.3	Expansión Multipolar en Electrostatica y Gravitación	27
9.3.1	Potencial Gravitacional de una Distribución Axisimétrica	27
9.3.2	Potencial Gravitacional Terrestre y el Coeficiente J_2	28
9.4	Problemas Exteriores en Coordenadas Esferoidales Prolatas	28
9.4.1	Ecuación Angular	28
9.4.2	Ecuación Radial Prolata	29
9.4.3	Selección de la Solución Radial Física	29
9.5	Conexión con la Relatividad General y las Perturbaciones de Agujeros Negros	29
9.5.1	Espacio-Tiempo de Weyl	29
9.5.2	Perturbaciones de Schwarzschild y el Espacio-Tiempo de Kerr	30
10	Problemas Matemáticos Resueltos	31
10.1	Problema 1: Ejemplo de Suma de Abel de Polinomios de Legendre	31
10.1.1	Resolución	31
10.2	Problema 2: Cálculo de Integrales utilizando Polinomios de Legendre	32
10.2.1	Resolución de I_1	32
10.2.2	Resolución de I_2	33
10.3	Problema 3: Demostración de una Integral que contiene una función Cosh	34
10.3.1	Resolución	34
10.4	Problema 4: Expansión de una Onda Plana en Ondas Esféricas (Rayleigh)	35
10.4.1	Método 1: Resolución utilizando Ortogonalidad de Legendre	35
10.4.2	Método 2: Resolución utilizando Relaciones de Recurrencia	36
11	Apéndice	38

1 Introducción y Polinomios de Legendre (Primera Especie)

Las funciones de Legendre y sus correspondientes ecuaciones diferenciales aparecen de manera recurrente al resolver problemas de física matemática que poseen simetría esférica o azimutal. El origen matemático de estas funciones se remonta a la resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, donde las ecuaciones angulares resultantes toman la forma de la famosa ecuación diferencial de Legendre.

1.1 Ecuación Diferencial Ordinaria de Legendre

La ecuación diferencial de Legendre se define como:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \ell(\ell + 1)y = 0 \quad (1)$$

donde el parámetro ℓ es típicamente un número entero no negativo, $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y con coeficientes variables. En el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, que corresponde usualmente al rango físico del coseno del ángulo polar ($x = \cos \theta$), las soluciones regulares se denominan **Polinomios de Legendre** y se denotan por $P_\ell(x)$.

La solución general de la ecuación ordinaria de Legendre es una combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes:

$$y(x) = C_1 P_\ell(x) + C_2 Q_\ell(x) \quad (2)$$

donde $P_\ell(x)$ es la función de Legendre de primera especie (polinomio de Legendre para ℓ entero) y $Q_\ell(x)$ representa la función de Legendre de segunda especie, la cual presenta singularidades logarítmicas en los extremos del intervalo, $x = \pm 1$.

1.2 Fórmula Generalizada de Rodrigues

Para una clase general de polinomios ortogonales $C_n(x)$ asociados a una función de peso $w(x)$ en un intervalo $[a, b]$, la fórmula generalizada de Rodrigues está dada por:

$$C_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x) s(x)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

donde K_n es la constante de normalización, $s(x)$ es un polinomio de grado $m \leq 2$ con raíces reales, y $w(x)$ es una función real, positiva e integrable en $[a, b]$ que satisface las condiciones de frontera:

$$w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0 \quad (4)$$

Bajo este formalismo general, se definen los coeficientes característicos:

- k_n como el coeficiente del término de mayor grado x^n en $C_n(x)$.
- k'_n como el coeficiente del término x^{n-1} en $C_n(x)$.
- h_n como la norma al cuadrado en $[a, b]$ respecto a la función de peso:

$$h_n = \int_a^b [C_n(x)]^2 w(x) dx \quad (5)$$

Para el caso específico de los polinomios de Legendre ordinarios $P_n(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$, la función de peso es $w(x) = 1$ y el polinomio geométrico es $s(x) = 1 - x^2$. Las constantes asociadas son:

$$K_n = (-2)^n n! \quad (6)$$

$$k_n = 2^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{n! \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, \quad k'_n = 0 \quad (7)$$

La norma del polinomio $P_n(x)$ está dada por:

$$h_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2n + 1} \quad (8)$$

Sustituyendo estos parámetros en la fórmula generalizada de Rodrigues, obtenemos la expresión tradicional para los polinomios de Legendre:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n \quad (9)$$

La cual puede escribirse de forma equivalente (y más común en la literatura física) como:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (10)$$

1.3 Primeros Polinomios de Legendre

Utilizando la fórmula de Rodrigues, es posible construir los primeros polinomios de Legendre de forma directa:

$$P_0(x) = 1 \quad (11)$$

$$P_1(x) = x \quad (12)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (13)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (14)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (15)$$

En problemas físicos con simetría axial, el término angular polar $x = \cos \theta$ es el argumento natural de los polinomios de Legendre. Por ejemplo, el polinomio de orden 2 expresado en términos del ángulo polar es:

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (16)$$

Esta función angular aparece de manera constante en problemas electrostáticos y de gravitación que contienen un momento cuadrupolar.

1.4 Ecuación de Legendre en Forma Autoadjunta

La ecuación diferencial de Legendre (1) puede escribirse de forma elegante y autoadjunta (o en forma de Sturm-Liouville) como:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \ell(\ell + 1)y = 0 \quad (17)$$

Esta representación autoadjunta es clave para demostrar la ortogonalidad de sus soluciones, como se detalla en secciones posteriores.

1.5 Propiedades de Paridad

Los polinomios de Legendre poseen una paridad definida bajo el cambio de signo de la variable de forma $x \rightarrow -x$:

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) \quad (18)$$

De esta relación se concluye inmediatamente que:

- Si ℓ es par, $P_\ell(x)$ es una función par ($P_\ell(-x) = P_\ell(x)$).
- Si ℓ es impar, $P_\ell(x)$ es una función impar ($P_\ell(-x) = -P_\ell(x)$).

2 Fórmulas de Recurrencia de los Polinomios de Legendre

Para simplificar el cálculo y la manipulación analítica de los polinomios de Legendre, existen relaciones llamadas fórmulas de recurrencia que interconectan polinomios de diferentes órdenes y sus derivadas de primer orden.

2.1 Relaciones Fundamentales de Recurrencia

Entre las relaciones más útiles se encuentran las siguientes:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (19)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad (20)$$

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + xP'_n(x) \quad (21)$$

$$P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x) \quad (22)$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad (23)$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) \quad (24)$$

donde las derivadas se definen como usualmente respecto a la variable real x :

$$P'_n(x) = \frac{dP_n(x)}{dx} \quad (25)$$

Estas ecuaciones son de crucial importancia en el cálculo numérico y la resolución de integrales en física cuántica y electromagnetismo, ya que permiten reducir derivadas a expresiones algebraicas y viceversa.

3 Ortogonalidad y Normalización de los Polinomios de Legendre

La propiedad fundamental que convierte a los polinomios de Legendre en una base de funciones matemáticamente rigurosa es su ortogonalidad en el intervalo $[-1, 1]$.

3.1 Teorema de Ortogonalidad

Dos polinomios de Legendre de distinto grado, $P_m(x)$ y $P_n(x)$, son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con una función de peso uniforme $w(x) = 1$:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (26)$$

donde δ_{mn} es el símbolo delta de Kronecker:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (27)$$

Otra forma

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta)P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}. \quad (28)$$

3.2 Demostración Analítica de la Ortogonalidad

Sean $u(x) = P_m(x)$ y $v(x) = P_n(x)$ soluciones de la ecuación diferencial de Legendre ordinaria, con $m \neq n$. Ambas funciones satisfacen respectivamente:

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + m(m+1)u = 0 \quad (29)$$

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + n(n+1)v = 0 \quad (30)$$

Multiplicando la primera ecuación por $v(x)$ y la segunda por $u(x)$, obtenemos:

$$(1-x^2)vu'' - 2xvu' + m(m+1)uv = 0 \quad (31)$$

$$(1-x^2)uv'' - 2xuv' + n(n+1)uv = 0 \quad (32)$$

Restando la primera ecuación de la segunda, se obtiene:

$$(1-x^2)(uv'' - vu'') - 2x(uv' - vu') = [m(m+1) - n(n+1)]uv \quad (33)$$

El miembro izquierdo de esta resta puede reescribirse exactamente como una derivada total:

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)(uv' - vu')] = [m(m+1) - n(n+1)]uv \quad (34)$$

Integrando ambos miembros en el intervalo $[-1, 1]$, se tiene:

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx = [(1-x^2)(uv' - vu')]_{-1}^1 \quad (35)$$

Al evaluar el lado derecho, notamos que el factor $(1-x^2)$ se anula tanto en $x = 1$ como en $x = -1$. Dado que $u(x)$, $v(x)$ y sus derivadas de primer orden son funciones finitas en todo el intervalo $[-1, 1]$ (al ser polinomios), el término de frontera se anula por completo:

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad (36)$$

Como asumimos originalmente que $m \neq n$, se cumple que $m(m+1) - n(n+1) \neq 0$. Por lo tanto, se concluye necesariamente que:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad (\text{para } m \neq n) \quad (37)$$

3.3 Cálculo de la Norma mediante la Función Generadora

La función generadora para los polinomios de Legendre se define como:

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1 \quad (38)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos una serie doble:

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)t^{m+n} \quad (39)$$

Integramos ahora ambos lados respecto a x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx \right] t^{m+n} \quad (40)$$

Aplicando el resultado de ortogonalidad (es decir, que solo los términos con $m = n$ sobreviven al integrar), el lado derecho se colapsa a una sola suma:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \right] t^{2n} \quad (41)$$

Para calcular el lado izquierdo de forma independiente, realizamos la integración directa:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \left[-\frac{1}{2t} \ln(1 - 2xt + t^2) \right]_{-1}^1 \quad (42)$$

$$= -\frac{1}{2t} [\ln(1 - 2t + t^2) - \ln(1 + 2t + t^2)] \quad (43)$$

$$= -\frac{1}{2t} [\ln(1 - t)^2 - \ln(1 + t)^2] \quad (44)$$

$$= -\frac{1}{2t} [2 \ln(1 - t) - 2 \ln(1 + t)] \quad (45)$$

$$= \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) \quad (46)$$

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor bien conocido para $\ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$ cuando $|t| < 1$:

$$\ln \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad (47)$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n} \quad (48)$$

Al comparar directamente los coeficientes de las potencias de t^{2n} en las ecuaciones (41) y (48), concluimos que la norma al cuadrado de los polinomios de Legendre ordinarios es:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (49)$$

3.4 Desarrollo en Serie de Legendre

Toda función $f(x)$ suficientemente regular y definida en el intervalo $[-1, 1]$ puede expandirse como una combinación lineal infinita de polinomios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x) \quad (50)$$

donde los coeficientes A_k se obtienen proyectando la función $f(x)$ sobre los polinomios mediante la ortogonalidad:

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx \quad (51)$$

Esta representación posee analogías profundas con las series clásicas de Fourier y es indispensable para resolver problemas electrostáticos y térmicos bajo condiciones de frontera esféricas.

3.5 Identidad de Parseval para Series de Legendre

Si representamos una función real $f(x)$ mediante su serie de Legendre, el promedio de su cuadrado en el intervalo de definición cumple con la identidad de Parseval:

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A_n^2}{2n+1} \quad (52)$$

En caso de que la función o los coeficientes sean de carácter complejo, la generalización matemática toma la siguiente forma:

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|A_n|^2}{2n+1} \quad (53)$$

3.6 Deducción de Relaciones de Recurrencia utilizando la Función Generadora

La función generadora no solo es útil para calcular normas, sino que es el método analítico más robusto para deducir de forma consistente las relaciones de recurrencia dadas en la Sección 2.

Definamos la función generadora:

$$g(t, x) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (54)$$

3.6.1 Derivando respecto a t

Tomando la derivada parcial de $g(t, x)$ respecto a la variable t , se obtiene:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} \quad (55)$$

Multiplicando ambos lados por $(1 - 2tx + t^2)$, se encuentra:

$$(1 - 2tx + t^2) \frac{\partial g}{\partial t} = (x - t)g(t, x) \quad (56)$$

Sustituyendo los desarrollos en serie de potencias correspondientes:

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} = (x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (57)$$

Expandiendo algebraicamente y agrupando los coeficientes del término general t^k en ambos lados, se obtiene directamente la recurrencia fundamental de tres términos:

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x) \quad (58)$$

3.6.2 Derivando respecto a x

Derivando de forma similar la función generadora respecto a x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n \quad (59)$$

Multiplicando por $(1 - 2tx + t^2)$:

$$(1 - 2tx + t^2) \frac{\partial g}{\partial x} = tg(t, x) \quad (60)$$

Al sustituir las series y comparar los coeficientes de la potencia t^k en ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$P_{k-1}(x) = P'_k(x) - 2xP'_{k-1}(x) + P'_{k-2}(x) \quad (61)$$

Desplazando adecuadamente el índice de la relación para simplificar:

$$P_k(x) = P'_{k+1}(x) - 2xP'_k(x) + P'_{k-1}(x) \quad (62)$$

La combinación lineal consistente de estas derivadas y la recurrencia de tres términos deducida anteriormente permite generar todo el conjunto de identidades y relaciones de recurrencia diferenciales dadas en la Sección 2, tales como:

$$P'_{k+1}(x) - P'_{k-1}(x) = (2k + 1)P_k(x) \quad (63)$$

$$P'_{k+1}(x) - xP'_k(x) = (k + 1)P_k(x) \quad (64)$$

y

$$xP'_k(x) = kP_k(x) + P'_{k-1}(x) \quad (65)$$

4 Funciones Asociadas de Legendre de Primera Especie

Cuando resolvemos problemas físicos en tres dimensiones y la solución angular posee dependencia azimutal (es decir, depende del ángulo de rotación ϕ), la ecuación diferencial ordinaria se generaliza, dando lugar a la ecuación asociada de Legendre.

4.1 Ecuación Asociada de Legendre

La ecuación diferencial asociada de Legendre se define formalmente como:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0 \quad (66)$$

donde ℓ y m son números enteros, satisfaciendo $0 \leq m \leq \ell$ para soluciones físicamente regulares. Multiplicando la ecuación completa por $(1 - x^2)$, obtenemos la forma matemáticamente equivalente:

$$(1 - x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + [\ell(\ell + 1)(1 - x^2) - m^2] y = 0 \quad (67)$$

La solución general de esta ecuación de segundo orden se representa en términos de funciones asociadas de primera y segunda especie:

$$y(x) = C_1 P_\ell^m(x) + C_2 Q_\ell^m(x) \quad (68)$$

4.2 Definiciones y la Fase de Condon-Shortley

En la literatura matemática existen diferentes convenciones de signos para definir las funciones asociadas de Legendre $P_\ell^m(x)$.

Convención sin la Fase de Condon-Shortley

En algunas aplicaciones de ingeniería y matemáticas puras, se define la función asociada sin incluir ningún factor de fase adicional como:

$$P_\ell^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \quad (69)$$

$$Q_\ell^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_\ell(x) \quad (70)$$

Convención con la Fase de Condon-Shortley (Adoptada en Mecánica Cuántica)

En la física teórica moderna y la mecánica cuántica se introduce un factor de fase $(-1)^m$ denominado **fase de Condon-Shortley**:

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad 0 \leq m \leq \ell \quad (71)$$

Esta es la convención que utilizaremos principalmente en las deducciones físicas de esta monografía.

Si el orden excede al grado ($m > \ell$), la función asociada es nula de manera idéntica:

$$P_\ell^m(x) = 0 \quad (\text{para } m > \ell) \quad (72)$$

Para valores negativos del índice m , la relación de paridad matemática con respecto al signo de m se define como:

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x) \quad (73)$$

4.3 Fórmula de Rodrigues para Funciones Asociadas

Haciendo uso de la fórmula de Rodrigues ordinaria (10), podemos escribir la función asociada $P_\ell^m(x)$ directamente en términos de derivadas de orden superior de la función de base $(x^2 - 1)^\ell$:

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell \quad (74)$$

4.4 Demostración Analítica de que $P_\ell^m(x)$ Satisface la Ecuación Asociada

A continuación, presentaremos una demostración directa y matemáticamente exhaustiva de que la definición de $P_\ell^m(x)$ con fase de Condon-Shortley satisface efectivamente la ecuación diferencial asociada (25).

Definamos la derivada m -ésima de un polinomio de Legendre ordinario:

$$u(x) = \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} = P_\ell^{(m)}(x) \quad (75)$$

De manera que la función asociada se escribe como:

$$y(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} u(x) \quad (76)$$

Para simplificar el álgebra, introduzcamos la variable geométrica $s = 1 - x^2$. Notemos que su primera derivada es $s' = -2x$. Reescribimos la función como:

$$y = (-1)^m s^{m/2} u \quad (77)$$

Calculamos la primera derivada de y respecto a x :

$$y' = (-1)^m \left[\frac{m}{2} s^{m/2-1} s' u + s^{m/2} u' \right] = (-1)^m s^{m/2} \left[u' - \frac{mx}{s} u \right] \quad (78)$$

Derivando por segunda vez:

$$y'' = (-1)^m \frac{d}{dx} \left\{ s^{m/2} \left[u' - \frac{mx}{s} u \right] \right\} \quad (79)$$

Aplicando la regla del producto y simplificando las derivadas algebraicas de los términos internos:

$$y'' = (-1)^m s^{m/2} \left[u'' - \frac{2mx}{s} u' + \left(\frac{-m + m(m-1)x^2}{s^2} \right) u \right] \quad (80)$$

Sustituyamos ahora estas expresiones directamente en el miembro izquierdo de la ecuación asociada de Legendre (25):

$$sy'' - 2xy' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{s} \right] y \quad (81)$$

Evaluamos cada término de forma separada:

$$sy'' = (-1)^m s^{m/2} \left[su'' - 2mxu' + \left(\frac{-m + m(m-1)x^2}{s} \right) u \right] \quad (82)$$

$$-2xy' = (-1)^m s^{m/2} \left[-2xu' + \frac{2mx^2}{s} u \right] \quad (83)$$

$$\left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{s} \right] y = (-1)^m s^{m/2} \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{s} \right] u \quad (84)$$

Sumando algebraicamente los tres miembros, el factor común $(-1)^m s^{m/2}$ se extrae y los coeficientes internos de u'' , u' y u se agrupan:

$$sy'' - 2xy' + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{s} \right] y = (-1)^m s^{m/2} [su'' - 2(m + 1)xu' + \ell(\ell + 1)u + \mathcal{N}(x)u] \quad (85)$$

donde el numerador residual $\mathcal{N}(x)$ asociado a la función u está dado por:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{-m + m(m - 1)x^2 + 2mx^2 - m^2}{s} \quad (86)$$

Simplifiquemos el numerador de esta fracción de forma analítica:

$$-m + m(m - 1)x^2 + 2mx^2 - m^2 = -m(m + 1) + [m(m - 1) + 2m]x^2 \quad (87)$$

$$= -m(m + 1) + [m^2 - m + 2m]x^2 \quad (88)$$

$$= -m(m + 1) + m(m + 1)x^2 \quad (89)$$

$$= -m(m + 1)(1 - x^2) \quad (90)$$

$$= -m(m + 1)s \quad (91)$$

Sustituyendo esto de vuelta en la expresión de la fracción, el término geométrico s se cancela:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{-m(m + 1)s}{s} = -m(m + 1) \quad (92)$$

De esta manera, la ecuación asociada se reduce a:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \mathcal{E}(u) \quad (93)$$

donde definimos el operador diferencial residual:

$$\mathcal{E}(u) = (1 - x^2)u'' - 2(m + 1)xu' + [\ell(\ell + 1) - m(m + 1)]u \quad (94)$$

Por lo tanto, para demostrar que $y(x)$ es solución de la ecuación asociada, basta con demostrar de forma independiente que $u(x) = P_\ell^{(m)}(x)$ es solución exacta de la ecuación diferencial $\mathcal{E}(u) = 0$.

Partimos para ello de la ecuación diferencial ordinaria de Legendre (1) para $P_\ell(x)$:

$$(1 - x^2)P_\ell'' - 2xP_\ell' + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0 \quad (95)$$

Aplicamos el operador de derivación m -ésimo $\frac{d^m}{dx^m}$ a toda la ecuación:

$$\frac{d^m}{dx^m} [(1 - x^2)P_\ell''] - 2\frac{d^m}{dx^m} [xP_\ell'] + \ell(\ell + 1)\frac{d^m}{dx^m} [P_\ell] = 0 \quad (96)$$

Para el primer y segundo término, aplicamos de forma rigurosa la regla de diferenciación de Leibniz para el producto de funciones:

$$\frac{d^m}{dx^m} (fg) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{m-k} g}{dx^{m-k}} \quad (97)$$

Análisis del primer término $f = 1 - x^2$, $g = P_\ell''$: Dado que las derivadas de $f(x)$ de orden superior a 2 son nulas ($f' = -2x$, $f'' = -2$, $f^{(k)} = 0$ para $k \geq 3$), la serie se colapsa a solo tres sumandos:

$$\frac{d^m}{dx^m} [(1 - x^2)P_\ell''] = \binom{m}{0}(1 - x^2)P_\ell^{(m+2)} + \binom{m}{1}(-2x)P_\ell^{(m+1)} + \binom{m}{2}(-2)P_\ell^{(m)} \quad (98)$$

$$= (1 - x^2)P_\ell^{(m+2)} - 2mxP_\ell^{(m+1)} - m(m - 1)P_\ell^{(m)} \quad (99)$$

Análisis del segundo término $f = x$, $g = P'_\ell$: Las derivadas de $f(x)$ de orden superior a 1 son nulas ($f' = 1$, $f^{(k)} = 0$ para $k \geq 2$), reduciendo la serie a dos sumandos:

$$\frac{d^m}{dx^m} [-2xP'_\ell] = -2 \left[\binom{m}{0} xP_\ell^{(m+1)} + \binom{m}{1} (1)P_\ell^{(m)} \right] \quad (100)$$

$$= -2xP_\ell^{(m+1)} - 2mP_\ell^{(m)} \quad (101)$$

Sustituyendo estas expansiones en la ecuación derivada general:

$$(1 - x^2)P_\ell^{(m+2)} - 2mxP_\ell^{(m+1)} - m(m-1)P_\ell^{(m)} - 2xP_\ell^{(m+1)} - 2mP_\ell^{(m)} + \ell(\ell+1)P_\ell^{(m)} = 0 \quad (102)$$

Agrupando los coeficientes de las derivadas de orden común:

$$(1 - x^2)P_\ell^{(m+2)} - 2(m+1)xP_\ell^{(m+1)} + [\ell(\ell+1) - m(m-1) - 2m]P_\ell^{(m)} = 0 \quad (103)$$

Notando que la constante simplifica a:

$$-m(m-1) - 2m = -m^2 + m - 2m = -m(m+1) \quad (104)$$

Obtenemos finalmente:

$$(1 - x^2)P_\ell^{(m+2)} - 2(m+1)xP_\ell^{(m+1)} + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]P_\ell^{(m)} = 0 \quad (105)$$

Reconociendo que $u = P_\ell^{(m)}$, $u' = P_\ell^{(m+1)}$ y $u'' = P_\ell^{(m+2)}$, esta ecuación es idéntica a la ecuación diferencial requerida $\mathcal{E}(u) = 0$ dada en (94). Esto completa la demostración rigurosa de que la función asociada $P_\ell^m(x)$ satisface exactamente la ecuación diferencial de Legendre generalizada.

4.5 Ejemplos de Funciones Asociadas

Utilizando la fórmula de definición con fase de Condon-Shortley y los primeros polinomios de Legendre, podemos calcular explícitamente las funciones asociadas de primer y segundo orden:

4.5.1 Caso $\ell = 1$

$$P_1^0(x) = x \quad (106)$$

$$P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad (\text{en términos angulares: } P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta) \quad (107)$$

4.5.2 Caso $\ell = 2$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (108)$$

$$P_2^1(x) = -3x\sqrt{1-x^2} \quad (P_2^1(\cos \theta) = -3\cos \theta \sin \theta) \quad (109)$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) \quad (P_2^2(\cos \theta) = 3\sin^2 \theta) \quad (110)$$

Estas expresiones angulares son cruciales para entender el comportamiento espacial de los armónicos esféricos y de los orbitales cuánticos periódicos.

5 Ortogonalidad y Normalización de las Funciones Asociadas

De manera similar al caso de los polinomios ordinarios, las funciones asociadas de Legendre presentan propiedades fundamentales de ortogonalidad. Sin embargo, debido a la presencia de dos índices (ℓ y m), existen diferentes formas de relaciones de ortogonalidad según el índice que se mantenga fijo.

5.1 Ortogonalidad para un Orden m Fijo

La relación de ortogonalidad más común y físicamente relevante ocurre cuando se mantiene el índice azimutal m fijo y se varía el grado angular ℓ :

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell k} \quad (111)$$

De esta propiedad se deriva que una función adecuada definida en $[-1, 1]$ puede expandirse como:

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} A_n P_n^m(x) \quad (112)$$

con coeficientes dados por:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_n^m(x) dx \quad (113)$$

5.2 Deducción Analítica de la Norma de las Funciones Asociadas

A continuación, deduciremos el factor de normalización para un valor fijo de m de forma analítica y rigurosa. Queremos calcular la integral de la norma:

$$I_{\ell}^m = \int_{-1}^1 [P_{\ell}^m(x)]^2 dx \quad (114)$$

Partiremos para ello de la relación de recurrencia que interconecta el grado angular con el orden:

$$(2\ell+1)xP_{\ell}^m(x) = (\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(x) + (\ell+m)P_{\ell-1}^m(x) \quad (115)$$

Multiplicamos toda la ecuación (115) por $P_{\ell-1}^m(x)$ e integramos en el intervalo $[-1, 1]$:

$$(2\ell+1) \int_{-1}^1 xP_{\ell}^m(x)P_{\ell-1}^m(x)dx = (\ell-m+1) \int_{-1}^1 P_{\ell+1}^m(x)P_{\ell-1}^m(x)dx + (\ell+m) \int_{-1}^1 [P_{\ell-1}^m(x)]^2 dx \quad (116)$$

Dado que los polinomios de grados distintos $\ell+1$ y $\ell-1$ son ortogonales para un m fijo, el primer término del lado derecho se anula de forma idéntica, resultando en:

$$(2\ell+1) \int_{-1}^1 xP_{\ell}^m(x)P_{\ell-1}^m(x)dx = (\ell+m)I_{\ell-1}^m \quad (117)$$

Utilizamos ahora la misma relación de recurrencia (115) pero desplazando el índice del grado de forma $\ell \rightarrow \ell-1$:

$$(2\ell-1)xP_{\ell-1}^m(x) = (\ell-m)P_{\ell}^m(x) + (\ell+m-1)P_{\ell-2}^m(x) \quad (118)$$

Multiplicamos este miembro por $P_{\ell}^m(x)$ e integramos. Por ortogonalidad, el término con $P_{\ell-2}^m$ se anula:

$$(2\ell-1) \int_{-1}^1 xP_{\ell}^m(x)P_{\ell-1}^m(x)dx = (\ell-m)I_{\ell}^m \quad (119)$$

Al despejar la integral común en las ecuaciones (117) y (119) e igualar las expresiones matemáticas resultantes, obtenemos:

$$\frac{\ell + m}{2\ell + 1} I_{\ell-1}^m = \frac{\ell - m}{2\ell - 1} I_{\ell}^m \quad (120)$$

Lo que nos proporciona una relación de recurrencia directa para las normas conforme varía el grado ℓ :

$$I_{\ell}^m = \frac{(\ell + m)(2\ell - 1)}{(\ell - m)(2\ell + 1)} I_{\ell-1}^m \quad (121)$$

Aplicando de forma reiterada e inductiva la relación de recurrencia (121) hacia atrás hasta llegar al grado base $\ell = m$, se obtiene:

$$I_{\ell}^m = \left[\frac{2m + 1}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(2m)!(\ell - m)!} \right] I_m^m \quad (122)$$

5.2.1 Cálculo del Término Base I_m^m

Para evaluar la constante residual I_m^m , utilizamos la definición de las funciones asociadas para el caso $\ell = m$:

$$P_m^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_m(x)}{dx^m} \quad (123)$$

Dado que el polinomio $P_m(x)$ es de grado m , su derivada m -ésima es una constante matemática simple asociada al coeficiente del término principal:

$$\frac{d^m P_m(x)}{dx^m} = \frac{(2m)!}{2^m m!} \quad (124)$$

Por tanto:

$$P_m^m(x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^m m!} (1 - x^2)^{m/2} \quad (125)$$

Expresando esta función en coordenadas angulares mediante el cambio $x = \cos \theta$ (lo que implica que $\sqrt{1 - x^2} = \sin \theta$), la norma al cuadrado toma la forma:

$$I_m^m = \int_{-1}^1 [P_m^m(x)]^2 dx = \left[\frac{(2m)!}{2^m m!} \right]^2 \int_0^{\pi} \sin^{2m+1} \theta d\theta \quad (126)$$

Utilizando el resultado analítico clásico de la integral trigonométrica:

$$\int_0^{\pi} \sin^{2m+1} \theta d\theta = \frac{2^{2m+1} (m!)^2}{(2m + 1)!} \quad (127)$$

Sustituyamos este valor en (126) para resolver I_m^m :

$$I_m^m = \frac{[(2m)!]^2}{2^{2m} (m!)^2} \frac{2^{2m+1} (m!)^2}{(2m + 1)!} = \frac{2(2m)!}{2m + 1} \quad (128)$$

Finalmente, sustituimos este resultado base de la norma I_m^m de vuelta en la ecuación general (122):

$$I_{\ell}^m = \left[\frac{2m + 1}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(2m)!(\ell - m)!} \right] \left[\frac{2(2m)!}{2m + 1} \right] = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \quad (129)$$

Esto completa la demostración rigurosa del factor de normalización de las funciones asociadas de Legendre.

5.3 Otras Relaciones de Ortogonalidad

Además de la ortogonalidad estándar para m fijo, existe otra relación matemática menos común pero de gran utilidad analítica en problemas de contorno físico. Ocurre cuando mantenemos el grado angular $\ell = n$ fijo y variamos los órdenes azimutales m y k bajo una función de peso singular $w(x) = \frac{1}{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x) P_n^m(x) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{km} \quad (130)$$

Expresada de forma equivalente en términos angulares de la variable polar θ , esta relación toma la forma:

$$\int_0^\pi P_n^k(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{km} \quad (131)$$

6 Funciones de Legendre de Segunda Especie ($Q_\ell(x)$)

Al ser la ecuación de Legendre una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, deben existir dos soluciones linealmente independientes para cualquier valor del parámetro ℓ . Mientras que los polinomios de Legendre $P_\ell(x)$ representan la solución físicamente regular en todo el intervalo $[-1, 1]$, la segunda solución matemáticamente independiente se denomina función de Legendre de segunda especie, $Q_\ell(x)$.

6.1 Reducción de Orden (Método de d'Alembert)

Dada una ecuación diferencial de segundo orden en su forma estándar:

$$y'' + F(x)y' + G(x)y = 0 \quad (132)$$

Si conocemos previamente una solución regular $y_1(x)$, una segunda solución linealmente independiente $y_2(x)$ puede obtenerse aplicando el método de reducción de orden de d'Alembert:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp \left[- \int F(x) dx \right]}{[y_1(x)]^2} dx \quad (133)$$

Para el caso específico de la ecuación diferencial ordinaria de Legendre (1):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{\ell(\ell+1)}{1-x^2} y = 0 \quad (134)$$

Identificamos la función del primer coeficiente como $F(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$. Su integral correspondiente es:

$$- \int F(x) dx = \int \frac{2x}{1-x^2} dx = -\ln(1-x^2) = \ln \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \quad (135)$$

Lo que resulta en el factor exponencial:

$$\exp \left[- \int F(x) dx \right] = \frac{1}{1-x^2} \quad (136)$$

Sustituyendo este término en la fórmula de reducción de orden, la segunda solución matemática $Q_\ell(x)$ se expresa como:

$$Q_\ell(x) = P_\ell(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)[P_\ell(x)]^2} \quad (137)$$

6.2 La Función de Orden Cero $Q_0(x)$

Para el caso más simple $\ell = 0$, sabemos que el primer polinomio de Legendre es $P_0(x) = 1$. Aplicando la fórmula de reducción de orden en el intervalo de definición físico $-1 < x < 1$:

$$Q_0(x) = 1 \cdot \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (138)$$

Notemos que a medida que $x \rightarrow \pm 1$, los límites del logaritmo tienden a cero o infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} |Q_0(x)| \rightarrow \infty \quad (139)$$

Esta divergencia singular es una propiedad general de todas las funciones de Legendre de segunda especie, lo que explica por qué se descartan en problemas físicos que involucren la regularidad en toda la superficie de una esfera (como en los problemas angulares usuales de coordenadas esféricas).

6.3 Primeras Funciones de Segunda Especie para $|x| < 1$

Utilizando la relación de recurrencia o integración, podemos escribir de forma analítica las primeras funciones de Legendre de segunda especie en el intervalo de definición interior:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (140)$$

$$Q_1(x) = xQ_0(x) - 1 = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 \quad (141)$$

$$Q_2(x) = P_2(x)Q_0(x) - \frac{3}{2}x = \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3}{2}x \quad (142)$$

$$Q_3(x) = P_3(x)Q_0(x) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}(5x^3 - 3x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3} \quad (143)$$

6.4 Relaciones de Recurrencia para las Funciones de Segunda Especie

Es un resultado analítico fundamental que las funciones de Legendre de segunda especie $Q_\ell(x)$ satisfacen **exactamente la misma relación de recurrencia de tres términos** que los polinomios de Legendre ordinarios:

$$(\ell + 1)Q_{\ell+1}(x) = (2\ell + 1)xQ_\ell(x) - \ell Q_{\ell-1}(x) \quad (144)$$

Por ejemplo, para $\ell = 1$, podemos verificar inmediatamente la consistencia algebraica:

$$2Q_2(x) = 3xQ_1(x) - Q_0(x) \quad (145)$$

6.5 Wronskiano de P_ℓ y Q_ℓ

Dado que $P_\ell(x)$ y $Q_\ell(x)$ son dos soluciones independientes de una ecuación diferencial lineal de segundo orden ordinaria, su determinante Wronskiano está dado por:

$$W\{P_\ell, Q_\ell\} = P_\ell(x) \frac{dQ_\ell(x)}{dx} - Q_\ell(x) \frac{dP_\ell(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \quad (146)$$

Dado que el Wronskiano no se anula para ningún punto interior del intervalo $-1 < x < 1$, se demuestra formalmente la independencia lineal del conjunto de soluciones.

6.6 Funciones Asociadas de Segunda Especie

De igual manera que en el caso de la primera especie, existen soluciones asociadas de Legendre de segunda especie para la ecuación diferencial generalizada con dependencia azimutal:

$$Q_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_\ell(x)}{dx^m}, \quad -1 < x < 1 \quad (147)$$

Para $m = 0$, se recupera trivialmente la función ordinaria $Q_\ell^0(x) = Q_\ell(x)$.

7 Funciones de Segunda Especie en el Dominio Radial Exterior ($x > 1$)

En numerosos problemas de la física práctica (particularmente en problemas electrostáticos, gravitatorios o de contorno formulados en coordenadas esferoidales prolatas), el dominio físico de interés de la variable real no es angular, sino que representa una coordenada radial exterior:

$$x > 1 \quad (148)$$

En este dominio radial, las funciones matemáticas deben redefinirse para mantener su carácter real y evitar valores complejos dentro de los argumentos logarítmicos.

7.1 Forma Real de las Funciones de Segunda Especie para $x > 1$

En el dominio exterior $x > 1$, la función de Legendre de segunda especie de orden cero se define de forma real como:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (149)$$

Las correspondientes funciones de órdenes superiores se expresan de manera similar:

$$Q_1(x) = xQ_0(x) - 1 = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - 1 \quad (150)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{3}{2}x \quad (151)$$

7.2 Comportamiento Asintótico

Mientras que los polinomios de Legendre $P_\ell(x)$ divergen fuertemente cuando la variable radial $x \rightarrow \infty$ como potencias positivas:

$$P_\ell(x) \sim x^\ell \quad (152)$$

Las funciones de segunda especie $Q_\ell(x)$ presentan la propiedad física crucial de **decrecer de forma monótona hacia cero** en el infinito:

$$Q_\ell(x) \sim \frac{2^\ell (\ell!)^2}{(2\ell + 1)!} \frac{1}{x^{\ell+1}}, \quad x \rightarrow \infty \quad (153)$$

En particular:

$$Q_0(x) \sim \frac{1}{x} \quad (154)$$

$$Q_1(x) \sim \frac{1}{3x^2} \quad (155)$$

$$Q_2(x) \sim \frac{2}{15x^3} \quad (156)$$

De manera general, se tiene la correspondencia asintótica:

$$P_\ell(x) \sim x^\ell, \quad Q_\ell(x) \sim x^{-\ell-1} \quad (157)$$

Esta diferencia de comportamiento en el infinito es la que hace que las funciones $Q_\ell(x)$ sean las soluciones físicamente apropiadas para modelar campos potenciales exteriores que deben desvanecerse en la frontera radial asintótica.

7.3 Funciones Asociadas de Segunda Especie para $x > 1$

Para el dominio radial exterior $x > 1$, las funciones asociadas de segunda especie se definen comúnmente mediante expresiones reales de la forma:

$$Q_\ell^m(x) = (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m Q_\ell(x)}{dx^m}, \quad x > 1 \quad (158)$$

donde el factor global de signo y fase depende de las convenciones particulares del autor o del software matemático utilizado.

7.4 Ejemplo Detallado: Cálculo Analítico de $Q_1^1(x)$ para $x > 1$

A continuación realizamos la deducción analítica paso a paso para hallar la forma explícita de la función asociada $Q_1^1(x)$ en el dominio $x > 1$.

Partimos para ello de la función ordinaria de orden 1:

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - 1 \quad (159)$$

Calculamos su derivada ordinaria respecto a x utilizando la regla del producto y de la cadena:

$$\frac{dQ_1(x)}{dx} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{x}{2} \frac{d}{dx} [\ln(x+1) - \ln(x-1)] \quad (160)$$

Evaluamos las derivadas simples de los logaritmos:

$$\frac{d}{dx} [\ln(x+1) - \ln(x-1)] = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{x^2 - 1} = -\frac{2}{x^2 - 1} \quad (161)$$

Sustituyendo este miembro:

$$\frac{dQ_1(x)}{dx} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{x}{2} \left(-\frac{2}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{x}{x^2 - 1} \quad (162)$$

De acuerdo con la definición geométrica real de la función asociada para $x > 1$:

$$Q_1^1(x) = \sqrt{x^2 - 1} \frac{dQ_1(x)}{dx} \quad (163)$$

Multiplicando el resultado de la derivada por el radical:

$$Q_1^1(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{x \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} \quad (164)$$

Simplificando algebraicamente el último término:

$$Q_1^1(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1 \quad (165)$$

7.4.1 Propiedades Singulares y Asintóticas de $Q_1^1(x)$

Esta expresión analítica para $Q_1^1(x)$ presenta dos comportamientos físicos muy importantes:

- **Singularidad en la frontera:** A medida que la coordenada radial se aproxima al límite geométrico $x \rightarrow 1^+$, la función $Q_1^1(x)$ diverge fuertemente:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |Q_1^1(x)| \rightarrow \infty \quad (166)$$

- **Decrecimiento asintótico:** Para valores radiales lejanos ($x \gg 1$), la aproximación asintótica de la función se comporta de forma decreciente según:

$$Q_1^1(x) \sim -\frac{2}{3x^2} \quad (167)$$

8 Otras Propiedades y Representaciones Integrales

Para complementar la formulación analítica de las funciones de Legendre, existen representaciones avanzadas que son indispensables en ciertos problemas de transporte de radiación y relatividad.

8.1 Polinomios Corridos de Legendre

En ciertas aplicaciones de cálculo numérico, procesamiento de señales y problemas de difusión térmica, es conveniente trabajar con un dominio de definición de la variable en el intervalo semi-positivo $[0, 1]$ en lugar del intervalo simétrico $[-1, 1]$. Para ello, se definen los **polinomios corridos de Legendre**, denotados comúnmente como $\tilde{P}_n(x)$.

La ecuación diferencial que gobierna a los polinomios corridos en el intervalo $[0, 1]$ es:

$$\frac{d}{dx} \left[x(1-x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda(\lambda+1)y = 0 \quad (168)$$

O de forma expandida equivalente:

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x) \frac{dy}{dx} + \lambda(\lambda+1)y = 0 \quad (169)$$

Se relacionan de manera directa con los polinomios de Legendre ordinarios mediante la transformación lineal de la variable $z = 2x - 1$:

$$\tilde{P}_n(x) = P_n(2x - 1), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (170)$$

8.2 Representación Integral de Schlöfli

La integral de Schlöfli representa una de las formulaciones integrales en el plano complejo más elegantes para los polinomios de Legendre. Partiendo de la fórmula de representación integral de Cauchy para derivadas de funciones analíticas:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(t)}{t-z} dt \quad (171)$$

Si definimos la función analítica $F(z) = (z^2 - 1)^n$, se tiene:

$$(z^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{t-z} dt \quad (172)$$

Derivando esta expresión de forma analítica respecto a la variable z un número n de veces, y sustituyendo en la definición de Rodrigues (10), obtenemos la representación integral de Schlöfli para los polinomios de Legendre:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (173)$$

Se puede demostrar matemáticamente de forma directa que esta representación en el plano complejo satisface la ecuación diferencial de Legendre:

$$(1-z^2) \frac{d^2 P_n}{dz^2} - 2z \frac{d P_n}{dz} + n(n+1) P_n = \frac{n+1}{2^{n+1} \pi i} \oint \frac{d}{dt} \left[\frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}} \right] dt = 0 \quad (174)$$

puesto que la integral de una derivada exacta en un contorno cerrado es idénticamente nula.

8.3 Teorema de la Adición

El teorema de la adición es una de las identidades trigonométricas y geométricas más potentes de las funciones de Legendre. Permite expresar el polinomio de Legendre del coseno del ángulo γ subtendido entre dos vectores arbitrarios $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ en términos de las coordenadas angulares individuales de cada vector (θ, ϕ) y (θ', ϕ') .

El coseno del ángulo geométrico γ está dado por:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (175)$$

El Teorema de la Adición establece formalmente que:

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n (-1)^m Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{-m}(\theta', \phi') \quad (176)$$

O expresado de forma real equivalente en términos directos de las funciones asociadas de Legendre:

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos [m(\phi - \phi')] \quad (177)$$

8.4 Polinomios Ultraesféricos (Gegenbauer)

Los polinomios ordinarios de Legendre representan un caso particular de una clase de polinomios ortogonales más general denominados polinomios ultraesféricos o de Gegenbauer, $C_n^\alpha(x)$, los cuales se obtienen a partir de la siguiente función generatriz:

$$g(t, x) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x) t^n \quad (178)$$

De esta definición general:

- Para el parámetro $\alpha = 1/2$, se recuperan exactamente los polinomios de Legendre ordinarios $P_n(x)$.
- Para el parámetro $\alpha = 1$, se obtienen los polinomios de Chebyshev de segunda especie, $U_n(x)$:

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n \quad (179)$$

9 Aplicaciones Físicas de las Funciones de Legendre

La potencia de las funciones de Legendre radica en su ubicuidad en la descripción de las leyes de la física clásica y moderna. A continuación se detallan las principales aplicaciones físicas formuladas de manera rigurosa.

9.1 La Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

La ecuación de Laplace en una región tridimensional libre de fuentes de carga o masa está dada por:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (180)$$

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , el operador Laplaciano expandido toma la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (181)$$

Buscamos una solución analítica aplicando la técnica de separación de variables:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi_\phi(\phi) \quad (182)$$

Sustituyendo el Ansatz y multiplicando la ecuación resultante por el factor $\frac{r^2}{R\Theta\Phi_\phi}$, obtenemos las constantes de separación independientes:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi_\phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi_\phi}{d\phi^2} = 0 \quad (183)$$

9.1.1 Separación Radial

Asociando la constante de separación radial a la forma clásica $\ell(\ell+1)$, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \ell(\ell+1)R = 0 \quad (184)$$

Cuya solución general es una combinación lineal de potencias de la distancia radial:

$$R(r) = Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)} \quad (185)$$

9.1.2 Separación Azimutal

La dependencia azimutal ϕ se aísla mediante la constante de separación de orden m^2 :

$$\frac{d^2 \Phi_\phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi_\phi = 0 \quad (186)$$

Cuya solución se expresa convenientemente mediante funciones armónicas complejas:

$$\Phi_\phi(\phi) = e^{im\phi} \quad (187)$$

Exigiendo la condición física de periodicidad de contorno bajo una revolución completa $\Phi_\phi(\phi + 2\pi) = \Phi_\phi(\phi)$, se tiene:

$$e^{2\pi im} = 1 \implies m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (188)$$

De esta forma, el índice m surge naturalmente cuantizado como un entero debido a la simetría geométrica azimutal.

En otros casos es posible escoger la forma

$$\Phi_\phi(\phi) = A_c \cos(m\phi) + A_s \sin(m\phi) \quad (189)$$

9.1.3 Ecuación Angular Polar

La ecuación diferencial resultante para la coordenada angular polar θ es:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (190)$$

Realizando el cambio de variable clásico $x = \cos \theta$ (lo que implica que $\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ y $\sin^2 \theta = 1 - x^2$), la ecuación angular se transforma de manera exacta en:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0 \quad (191)$$

La cual es precisamente la ecuación asociada de Legendre (25). Dado que requerimos soluciones físicas que sean regulares en toda la esfera (incluyendo los polos polares $\theta = 0, \pi$ que corresponden a $x = \pm 1$), descartamos la solución singular $Q_\ell^m(x)$. Por tanto, la solución regular aceptable es:

$$\Theta(\theta) = P_\ell^m(\cos \theta) \quad (192)$$

9.1.4 Armónicos Esféricos

Al combinar las dos soluciones angulares normalizadas de forma consistente, se construyen los **Armónicos Esféricos** $Y_\ell^m(\theta, \phi)$, los cuales constituyen una base ortonormal completa en la superficie de la esfera unitaria:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (193)$$

Los armónicos esféricos satisfacen la condición de ortonormalidad respecto a la integración en el ángulo sólido completo Ω :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_\ell^m(\theta, \phi) [Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)]^* \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (194)$$

9.1.5 Solución General

La solución general se encuentra al tomar en cuenta las condiciones de contorno. Hay varias formas de escribir la solución:

La primera forma se puede escribir de la siguiente manera

$$\Phi_\phi(r, \theta, \phi) = [Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}] P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (195)$$

La segunda forma se puede escribir de la siguiente manera

$$\Phi_\phi(r, \theta, \phi) = [Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}] P_\ell^m(\cos \theta) [A_c \cos(m\phi) + A_s \sin(m\phi)], \quad (196)$$

La tercera forma se puede escribir de la siguiente manera

$$\Phi_\phi(r, \theta, \phi) = [Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}] Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (197)$$

Las constantes A , B ó A , B , A_c , A_s se determinan de las condiciones de frontera.

A menudo la solución general requiere sumar sobre ℓ ó m ó ambas para obtener la solución general.

9.2 Relación con la Mecánica Cuántica: El Momento Angular

En mecánica cuántica, al resolver la ecuación de Schrödinger para sistemas con fuerzas centrales, los armónicos esféricos surgen de manera natural como las autofunciones simultáneas de los operadores cuánticos asociados al cuadrado del momento angular orbital $\mathbf{L}^2$ y su componente en el eje de cuantización L_z :

$$\mathbf{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (198)$$

$$L_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (199)$$

De esta manera, las constantes de separación matemática adquieren un significado físico observable directo: el número cuántico principal del momento angular orbital ℓ cuantiza la magnitud del momento angular, mientras que el número cuántico magnético m cuantiza la proyección de dicho vector en el eje z . Los valores cuánticos permitidos son:

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell \quad (200)$$

9.2.1 Átomo de Hidrógeno

En el átomo de hidrógeno, la función de onda de contorno espacial completa para un electrón en un estado cuántico definido por los números cuánticos (n, ℓ, m) se escribe de forma separable como:

$$\Psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (201)$$

De la estructura angular polar impuesta por los armónicos esféricos (y por ende, por las funciones asociadas de Legendre) se derivan las formas geométricas espaciales características de los orbitales atómicos clásicos de tipo s ($\ell = 0$), p ($\ell = 1$), d ($\ell = 2$), etc.

9.3 Expansión Multipolar en Electroestática y Gravitación

Una aplicación física indispensable de los polinomios de Legendre es el desarrollo analítico del potencial electromagnético o gravitatorio generado por distribuciones compactas de carga o masa.

El potencial de contorno generado en un punto del espacio $\mathbf{r}$ debido a una fuente elemental situada en $\mathbf{r}'$ es inversamente proporcional a la distancia mutua $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Utilizando la función generadora de Legendre, podemos expandir esta inversa de la distancia de forma elegante:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \quad (\text{para } r > r') \quad (202)$$

O en una forma perfectamente simétrica:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{\min}^n}{r_{\max}^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \quad (203)$$

donde $r_{\min} = \min(r, r')$, $r_{\max} = \max(r, r')$ y γ es el ángulo subtendido entre ambos vectores.

9.3.1 Potencial Gravitacional de una Distribución Axisimétrica

Para un cuerpo celeste o distribución de masa con simetría axial, el potencial gravitacional exterior a grandes distancias puede desarrollarse en serie de Legendre como:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{A_\ell}{r^\ell} P_\ell(\cos \theta) \right] \quad (204)$$

Los términos del desarrollo corresponden a momentos físicos definidos:

- $\ell = 0$: Monopolo (masa total M).
- $\ell = 1$: Dipolo (nulo si el origen se sitúa en el centro de masa).
- $\ell = 2$: Cuadrupolo (achatamiento o elongación del cuerpo).
- $\ell = 3$: Octupolo.

9.3.2 Potencial Gravitacional Terrestre y el Coeficiente J_2

Debido al movimiento de rotación de la Tierra, nuestro planeta no es una esfera perfecta, sino un esferoide achatado en los polos. En geodesia y dinámica de satélites artificiales, el potencial gravitacional exterior de la Tierra se describe mediante la aproximación cuadrupolar clásica:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right] \quad (205)$$

donde R es el radio ecuatorial terrestre y J_2 es el coeficiente dinámico de forma, el cual representa principalmente el achatamiento de la Tierra. Dado que:

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (206)$$

el término J_2 introduce una corrección angular cuadrupolar que distorsiona las órbitas keplerianas de los satélites, induciendo la precesión de los nodos.

9.4 Problemas Exteriores en Coordenadas Esferoidales Prolatas

Las coordenadas esferoidales prolatas (ξ, η, ϕ) son ideales para resolver la ecuación de Laplace en la vecindad de objetos alargados, como antenas, moléculas de forma oblonga o campos de agujeros negros axisimétricos. Se definen en relación a las coordenadas cartesianas mediante:

$$x = a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi \quad (207)$$

$$y = a \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \phi \quad (208)$$

$$z = a\xi\eta \quad (209)$$

con los rangos físicos $1 \leq \xi < \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$, y $0 \leq \phi < 2\pi$.

Buscamos una solución para la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ con simetría separable de la forma:

$$\Phi(\xi, \eta, \phi) = R(\xi)S(\eta)e^{im\phi} \quad (210)$$

9.4.1 Ecuación Angular

La separación de variables para la coordenada angular η conduce de forma directa a la ecuación asociada de Legendre en el intervalo de definición físico $[-1, 1]$:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right] + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S = 0 \quad (211)$$

Cuya solución regular en este intervalo es:

$$S(\eta) = P_\ell^m(\eta) \quad (212)$$

9.4.2 Ecuación Radial Prolata

La ecuación diferencial resultante para la coordenada radial prolata ξ es:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{dR}{d\xi} \right] - \left[\ell(\ell + 1) + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] R = 0 \quad (213)$$

Realizando un cambio algebraico de signo, podemos reescribirla exactamente como:

$$(1 - \xi^2)R'' - 2\xi R' + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] R = 0 \quad (214)$$

Esta es nuevamente la ecuación asociada de Legendre, pero ahora evaluada en el dominio exterior $\xi > 1$. Sus dos soluciones linealmente independientes se expresan como $P_\ell^m(\xi)$ y $Q_\ell^m(\xi)$.

9.4.3 Selección de la Solución Radial Física

Para resolver un problema físico exterior en el cual requerimos que el potencial electrostático o de contorno se desvanezca en el infinito asintótico ($\xi \rightarrow \infty$), evaluamos el comportamiento de las soluciones en dicho límite:

$$P_\ell^m(\xi) \sim \xi^\ell \rightarrow \infty, \quad Q_\ell^m(\xi) \sim \xi^{-\ell-1} \rightarrow 0 \quad (215)$$

Por lo tanto, la física del problema nos obliga a descartar la primera especie y a seleccionar la función de segunda especie de forma única:

$$R(\xi) \propto Q_\ell^m(\xi) \quad (216)$$

De esta forma, la solución de modo completo (ℓ, m) para un potencial exterior prolato tiene la forma física natural:

$$\Phi_{\ell m}(\xi, \eta, \phi) = A_{\ell m} Q_\ell^m(\xi) P_\ell^m(\eta) e^{im\phi} \quad (217)$$

9.5 Conexión con la Relatividad General y las Perturbaciones de Agujeros Negros

La formulación de potenciales exteriores en coordenadas esferoidales prolatas y su resolución mediante funciones de Legendre de segunda especie posee una aplicación teórica fundamental en la física de la Relatividad General.

9.5.1 Espacio-Tiempo de Weyl

Para un espacio-tiempo estático, en el vacío y con simetría axial, la métrica de Weyl correspondiente se expresa de la forma:

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad (218)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío para esta métrica imponen que la función métrica de potencial gravitacional $\psi(\rho, z)$ satisfaga exactamente la ecuación de Laplace axisimétrica clásica:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (219)$$

Al reformular este potencial en coordenadas esferoidales prolatas, las soluciones asintóticas para la métrica exterior del agujero negro o cuerpo masivo pueden desarrollarse en términos de las funciones de Legendre de segunda especie:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell Q_\ell(\xi) P_\ell(\eta) \quad (220)$$

donde cada término ℓ está asociado de forma unívoca a la estructura de multipolos gravitacionales de la solución relativista.

9.5.2 Perturbaciones de Schwarzschild y el Espacio-Tiempo de Kerr

En la teoría de perturbaciones de agujeros negros esféricos de Schwarzschild, las fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo de fondo $\delta g_{\mu\nu}$ se proyectan en modos angulares utilizando armónicos esféricos escalares, vectoriales y tensoriales:

$$\delta g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} h_{\mu\nu}^{\ell m}(t, r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (221)$$

Esta deconstrucción angular conduce a las famosas ecuaciones diferenciales radiales de Regge-Wheeler (para perturbaciones de paridad impar) y Zerilli (para paridad par), permitiendo calcular la emisión y absorción de ondas gravitacionales.

En el caso de agujeros negros en rotación descritos por la métrica de Kerr, la simetría esférica se rompe y se generaliza. Al resolver la ecuación de Teukolsky para las perturbaciones de curvatura del agujero negro de Kerr, las funciones angulares polares resultantes ya no son los armónicos esféricos estándar, sino que se generalizan a los denominados **armónicos esferoidales de spin**, los cuales representan una extensión matemática directa que involucra los polinomios y funciones asociadas de Legendre modificados por el momento angular de rotación del agujero negro.

10 Problemas Matemáticos Resueltos

Para ilustrar de forma práctica la potencia operativa de las funciones de Legendre, presentaremos a continuación la resolución detallada y paso a paso de diversos problemas matemáticos y de integración clásicos extraídos de las fuentes analizadas.

10.1 Problema 1: Ejemplo de Suma de Abel de Polinomios de Legendre

Queremos calcular la suma infinita de polinomios de Legendre:

$$S(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \quad (222)$$

10.1.1 Resolución

Partimos de la función generadora de Legendre, haciendo el cambio angular $x = \cos \theta$:

$$(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) t^n, \quad |t| < 1 \quad (223)$$

Dado que la función generadora se deduce rigurosamente para el intervalo de convergencia abierto $|t| < 1$, no podemos sustituir de forma directa $t = 1$ en la serie de potencias sin incurrir en una divergencia matemática. En su lugar, evaluamos la suma de la serie utilizando el riguroso concepto de **límite de Abel** cuando $t \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) t^n = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}} \quad (224)$$

Para un ángulo polar en el rango interior de definición $0 < \theta < \pi$, evaluamos algebraicamente el límite del miembro izquierdo:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos \theta + 1}} \quad (225)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} \quad (226)$$

Utilizando la identidad trigonométrica del ángulo mitad:

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (227)$$

Sustituyendo esta identidad en el radical, se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}} = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{1}{2} \csc \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (228)$$

Por lo tanto, en el sentido formal de la suma de Abel, se tiene el resultado analítico exacto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \stackrel{\text{Abel}}{=} \frac{1}{2} \csc \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (229)$$

10.2 Problema 2: Cálculo de Integrales utilizando Polinomios de Legendre

Consideremos los parámetros reales de radio $a > 0$ y $|b| < a$. Queremos evaluar analíticamente las siguientes dos integrales definidas de contorno:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{(a \cos \theta + b) \sin \theta}{\xi} d\theta \quad (230)$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) \sin \theta}{\xi} d\theta \quad (231)$$

donde el factor radial ξ está definido de forma geométrica como:

$$\xi = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2} \quad (232)$$

10.2.1 Resolución de I_1

Realizamos el cambio de variable clásico $x = \cos \theta$. Esto implica que:

$$dx = -\sin \theta d\theta, \quad \text{con el rango } -1 \leq x \leq 1 \quad (233)$$

Definamos asimismo la constante adimensional de escala $t = \frac{b}{a}$. Dado que asumimos originalmente que $|b| < a$, el parámetro adimensional satisface la convergencia de la función generadora $|t| < 1$. Reescribimos el factor radial ξ de la forma:

$$\xi^2 = a^2(1 + 2tx + t^2) \implies \xi = a\sqrt{1 + 2tx + t^2} \quad (234)$$

Sustituyendo estos cambios de variable en la definición de la integral I_1 dada en (230):

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{ax + b}{a\sqrt{1 + 2tx + t^2}} dx \quad (235)$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{x + \frac{b}{a}}{\sqrt{1 + 2tx + t^2}} dx \quad (236)$$

$$= \int_{-1}^1 (x + t)(1 + 2tx + t^2)^{-1/2} dx \quad (237)$$

Haciendo uso de la función generadora de Legendre, expandimos el término del radical:

$$(1 + 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n P_n(x) \quad (238)$$

Sustituyendo este desarrollo en la integral (237):

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \int_{-1}^1 (x + t) P_n(x) dx \quad (239)$$

Notemos ahora que el binomio del integrando $(x + t)$ puede expresarse de forma exacta como una combinación lineal de los primeros polinomios de Legendre ordinarios, dado que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$:

$$x + t = P_1(x) + tP_0(x) \quad (240)$$

Sustituyendo esto, la integral se reduce a:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \left[\int_{-1}^1 P_1(x) P_n(x) dx + t \int_{-1}^1 P_0(x) P_n(x) dx \right] \quad (241)$$

Aplicando de forma directa el teorema de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, notamos que:

- La primera integral $\int_{-1}^1 P_1 P_n dx$ es no nula únicamente para el término de la serie $n = 1$.
- La segunda integral $\int_{-1}^1 P_0 P_n dx$ es no nula únicamente para el término de la serie $n = 0$.

Evaluando de forma separada los dos términos sobrevivientes de la serie infinita:

$$I_1 = (-t)^1 \int_{-1}^1 [P_1(x)]^2 dx + t(-t)^0 \int_{-1}^1 [P_0(x)]^2 dx \quad (242)$$

$$= -t \left(\frac{2}{3} \right) + t(1)(2) \quad (243)$$

$$= -\frac{2}{3}t + 2t \quad (244)$$

$$= \frac{4}{3}t \quad (245)$$

Deshaciendo el cambio de variable adimensional de escala $t = \frac{b}{a}$, obtenemos el resultado analítico final exacto de la integral I_1 :

$$I_1 = \frac{4b}{3a} \quad (246)$$

10.2.2 Resolución de I_2

Sustituyendo de igual forma los cambios de variable trigonométricos e incluyendo la identidad circular $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$, la integral I_2 se expresa como:

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{ax^2 + b(1 - x^2)}{a\sqrt{1 + 2tx + t^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{(1 - t)x^2 + t}{\sqrt{1 + 2tx + t^2}} dx \quad (247)$$

Sustituyendo la expansión de la función generadora en serie de Legendre:

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \int_{-1}^1 [(1 - t)x^2 + t] P_n(x) dx \quad (248)$$

Expresamos el término del de el polinomio cuadrático interno del integrando en términos de la base de Legendre. Sabiendo que $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, podemos despejar la potencia cuadrática de forma analítica:

$$x^2 = \frac{1}{3} [2P_2(x) + P_0(x)] \quad (249)$$

Sustituyendo esto en la expresión completa del de el polinomio cuadrático:

$$(1 - t)x^2 + t = (1 - t) \left(\frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \right) + tP_0(x) \quad (250)$$

$$= \frac{2}{3}(1 - t)P_2(x) + \left[\frac{1 - t}{3} + t \right] P_0(x) \quad (251)$$

$$= \frac{2}{3}(1 - t)P_2(x) + \left(\frac{1 + 2t}{3} \right) P_0(x) \quad (252)$$

Sustituyendo esta combinación lineal de Legendre de vuelta en la integral de la serie (248):

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3}(1 - t)P_2(x) + \left(\frac{1 + 2t}{3} \right) P_0(x) \right] P_n(x) dx \quad (253)$$

Por ortogonalidad, los únicos términos que sobreviven en la sumatoria son correspondientes a $n = 0$ y $n = 2$:

$$I_2 = (-t)^0 \left(\frac{1+2t}{3} \right) \int_{-1}^1 [P_0(x)]^2 dx + (-t)^2 \frac{2}{3}(1-t) \int_{-1}^1 [P_2(x)]^2 dx \quad (254)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1+2t}{3} \right) \cdot (2) + t^2 \cdot \frac{2}{3}(1-t) \cdot \left(\frac{2}{5} \right) \quad (255)$$

$$= \frac{2}{3}(1+2t) + \frac{4}{15}t^2(1-t) \quad (256)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t + \frac{4}{15}t^2 - \frac{4}{15}t^3 \quad (257)$$

Deshaciendo el cambio de variable de escala $t = \frac{b}{a}$, y factorizando algebraicamente los términos, se obtiene finalmente:

$$I_2 = \frac{1}{15a^3} (10a^3 + 20a^2b + 4ab^2 - 4b^3) \quad (258)$$

Esto completa la resolución analítica de ambas integrales.

10.3 Problema 3: Demostración de una Integral que contiene una función Cosh

Queremos evaluar de forma analítica y demostrar la siguiente integral para $x > 0$:

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 (\cosh 2x - z)^{-1/2} P_n(z) dz = \sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1} e^{-(2n+1)x} \quad (259)$$

10.3.1 Resolución

Partimos de la definición trigonométrica del coseno hiperbólico:

$$\cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \quad (260)$$

Reescribimos el integrando de forma que contenga un factor común:

$$\cosh 2x - z = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - z \quad (261)$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} (1 - 2ze^{-2x} + e^{-4x}) \quad (262)$$

Al aplicar la potencia fraccionaria inversa $-1/2$:

$$(\cosh 2x - z)^{-1/2} = \sqrt{2}e^{-x} (1 - 2ze^{-2x} + e^{-4x})^{-1/2} \quad (263)$$

Definamos la variable de escala $t = e^{-2x}$. Dado que la condición física estipula que $x > 0$, se cumple de forma estricta que la exponencial es menor que uno, es decir, $0 < t < 1$, lo que garantiza plenamente la convergencia de la función generadora de Legendre.

Sustituyendo t en la ecuación (263) y aplicando la expansión de la función generadora:

$$(1 - 2zt + t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)e^{-2kx} \quad (264)$$

De esta forma, el integrando completo se expresa como:

$$(\cosh 2x - z)^{-1/2} = \sqrt{2}e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)e^{-2kx} \quad (265)$$

Multiplicamos ahora esta sumatoria por el de el polinomio de Legendre $P_n(z)$ e integramos en el intervalo $[-1, 1]$:

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 (\cosh 2x - z)^{-1/2} P_n(z) dz \quad (266)$$

$$= \sqrt{2} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx} \int_{-1}^1 P_n(z) P_k(z) dz \quad (267)$$

Aplicando de forma directo el teorema de ortogonalidad (32), la integral de contorno se anula para todo término excepto para la coincidencia de índices $k = n$:

$$I_n(x) = \sqrt{2} e^{-x} e^{-2nx} \left(\frac{2}{2n+1} \right) \quad (268)$$

Agrupando los términos exponenciales:

$$e^{-x} e^{-2nx} = e^{-(2n+1)x} \quad (269)$$

Y reconociendo que el factor numérico puede reescribirse en términos de potencias inversas como:

$$\frac{2}{2n+1} = \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (270)$$

Obtenemos finalmente el resultado matemático exacto requerido:

$$I_n(x) = \sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1} e^{-(2n+1)x} \quad (271)$$

Esto completa la demostración formal de manera sencilla combinando la función generadora con la ortogonalidad.

10.4 Problema 4: Expansión de una Onda Plana en Ondas Esféricas (Rayleigh)

Queremos demostrar la expansión clásica de Rayleigh para una onda plana armónica en términos de funciones de Bessel esféricas $j_n(kr)$ y polinomios de Legendre de $\cos \gamma$:

$$e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) P_n(\cos \gamma) \quad (272)$$

y determinar analíticamente los coeficientes complejos a_n . Presentaremos dos métodos de resolución muy diferentes extraídos de las fuentes.

10.4.1 Método 1: Resolución utilizando Ortogonalidad de Legendre

Definamos para simplicidad analítica las variables adimensionales $x = \cos \gamma$ y $z = kr$. La expansión de la onda plana se escribe como:

$$e^{izx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) P_n(x) \quad (273)$$

Multiplicamos ambos miembros por el de el polinomio de Legendre $P_m(x)$ e integramos en el intervalo $[-1, 1]$ respecto a x :

$$\int_{-1}^1 e^{izx} P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \quad (274)$$

Por el teorema de ortogonalidad de de Legendre (13), solo el término con $n = m$ es no nulo en el lado derecho:

$$\int_{-1}^1 e^{izx} P_m(x) dx = a_m j_m(z) \left(\frac{2}{2m+1} \right) \quad (275)$$

Por otro lado, de la teoría clásica de funciones esféricas de Bessel, se sabe que las funciones $j_m(z)$ admiten una representación integral definida dada exactamente por:

$$\int_{-1}^1 e^{izx} P_m(x) dx = 2i^m j_m(z) \quad (276)$$

Igualando directamente los miembros derechos de las ecuaciones (275) y (276):

$$a_m j_m(z) \left(\frac{2}{2m+1} \right) = 2i^m j_m(z) \quad (277)$$

Cancelando los factores comunes de la función de Bessel $j_m(z)$ y el factor numérico de escala en ambos lados:

$$\frac{a_m}{2m+1} = i^m \implies a_m = i^m (2m+1) \quad (278)$$

Escribiendo el índice en términos de la variable original n , obtenemos la expansión de Rayleigh buscada:

$$e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \gamma) \quad (279)$$

Los primeros términos de esta expansión en ondas esféricas parciales son:

$$e^{ikr \cos \gamma} = j_0(kr) + 3ij_1(kr) \cos \gamma - \frac{5}{2}j_2(kr)(3 \cos^2 \gamma - 1) - \frac{7i}{2}j_3(kr)(5 \cos^3 \gamma - 3 \cos \gamma) + \dots \quad (280)$$

10.4.2 Método 2: Resolución utilizando Relaciones de Recurrencia

Como método alternativo e inductivo muy potente, podemos resolver los coeficientes a_n de la serie utilizando únicamente relaciones de recurrencia diferenciales e identidades algebraicas de las funciones de Bessel esféricas y de Legendre, sin recurrir a representaciones integrales.

Partimos de la definición con las variables escaladas $x = kr$ y $u = \cos \gamma$:

$$e^{ixu} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(x) P_n(u) \quad (281)$$

Derivamos ambos miembros de la ecuación (281) respecto a la variable radial adimensional x :

$$iue^{ixu} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j'_n(x) P_n(u) \quad (282)$$

Sustituyendo el desarrollo en serie del exponencial original en el miembro izquierdo:

$$iu \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(x) P_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j'_n(x) P_n(u) \quad (283)$$

Que reescribimos agrupando como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} i a_n j_n(x) [u P_n(u)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j'_n(x) P_n(u) \quad (284)$$

Para eliminar el factor $uP_n(u)$, aplicamos la relación de recurrencia fundamental de tres términos de Legendre (19):

$$uP_n(u) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(u) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(u) \quad (285)$$

Sustituyendo esta identidad en la sumatoria de la izquierda en (284):

$$\sum_{n=0}^{\infty} ia_n j_n(x) \left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(u) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(u) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j'_n(x) P_n(u) \quad (286)$$

Para agrupar los términos de la izquierda bajo el de el polinomio de Legendre común $P_n(u)$, cambiamos de forma consistente los índices de las sumas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} i \left[\frac{n}{2n-1}a_{n-1}j_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+3}a_{n+1}j_{n+1}(x) \right] P_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j'_n(x) P_n(u) \quad (287)$$

Por la independencia de los polinomios de Legendre de diferentes grados, los coeficientes asociados a cada $P_n(u)$ en ambos lados de la igualdad de la serie deben ser idénticos para cada valor del índice:

$$a_n j'_n(x) = i \left[\frac{n}{2n-1}a_{n-1}j_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+3}a_{n+1}j_{n+1}(x) \right] \quad (288)$$

A continuación, eliminamos la derivada de la función de Bessel esférica $j'_n(x)$ del miembro izquierdo aplicando la relación de recurrencia diferencial estándar de las funciones de Bessel:

$$j'_n(x) = \frac{n}{2n+1}j_{n-1}(x) - \frac{n+1}{2n+1}j_{n+1}(x) \quad (289)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (288):

$$a_n \left[\frac{n}{2n+1}j_{n-1}(x) - \frac{n+1}{2n+1}j_{n+1}(x) \right] = i \left[\frac{n}{2n-1}a_{n-1}j_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+3}a_{n+1}j_{n+1}(x) \right] \quad (290)$$

Para que esta relación matemática (290) se cumpla de manera consistente para todas las funciones de Bessel independientes $j_{n-1}(x)$ y $j_{n+1}(x)$, comparamos por separado los coeficientes asociados a cada una de estas funciones:

Comparando los coeficientes de $j_{n-1}(x)$:

$$a_n \frac{n}{2n+1} = ia_{n-1} \frac{n}{2n-1} \implies a_n = i \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) a_{n-1} \quad (291)$$

Comparando los coeficientes de $j_{n+1}(x)$:

$$-a_n \frac{n+1}{2n+1} = ia_{n+1} \frac{n+1}{2n+3} \implies a_{n+1} = i \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right) a_n \quad (292)$$

Ambas relaciones de recurrencia (291) y (292) son perfectamente consistentes entre sí. Utilizando la relación (291) de forma inductiva hacia atrás, expresamos el término general a_n en función del de el coeficiente inicial a_0 :

$$a_n = i^n \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) \left(\frac{2n-1}{2n-3} \right) \cdots \left(\frac{3}{1} \right) a_0 \quad (293)$$

$$= i^n (2n+1) a_0 \quad (294)$$

Para resolver el de el coeficiente inicial a_0 , evaluamos la serie original de la onda plana (281) en el límite del de el origen radial $x = kr = 0$. Haciendo uso de las propiedades de frontera conocidas de las funciones esféricas de Bessel:

$$j_0(0) = 1, \quad j_n(0) = 0 \quad (\text{para } n \geq 1) \quad (295)$$

Y sabiendo asimismo que $P_0(u) = 1$, la serie evaluada en $x = 0$ colapsa a:

$$e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(0) P_n(u) \implies 1 = a_0 \cdot 1 \cdot 1 \implies a_0 = 1 \quad (296)$$

Sustituyendo el valor $a_0 = 1$ en la fórmula inductiva, encontramos los coeficientes finales:

$$a_n = i^n (2n + 1) \quad (297)$$

Lo que demuestra la expansión de Rayleigh por un método puramente algebraico e inductivo.

11 Apéndice

La demostración de que P_ℓ^m es solución de la ecuación asociada de Legendre sin omitir pasos intermedios se presenta a continuación

$$\begin{aligned} u &= \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ y &= (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} u \\ \frac{dy}{dx} &= (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{du}{dx} + (-1)^m (1 - x^2)^{m/2-1} (m/2)(-2x) u \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{du}{dx} - (-1)^m (1 - x^2)^{m/2-1} m x u \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \left[\frac{du}{dx} - \frac{m x}{(1 - x^2)} u \right] \\ -2x \frac{dy}{dx} &= -2(-1)^m x (1 - x^2)^{m/2} \left[\frac{du}{dx} - \frac{m x}{(1 - x^2)} u \right] \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \left[-2x \frac{du}{dx} + \frac{2m x^2}{(1 - x^2)} u \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx^2} &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2-1} (m/2)(-2x) \left[\frac{du}{dx} - \frac{mx}{(1-x^2)} u \right] \\
&+ (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{(1-x^2)} u + \frac{mx}{(1-x^2)^2} (-2x) u \right] \\
&= -(-1)^m (1-x^2)^{m/2-1} mx \left[\frac{du}{dx} - \frac{mx}{(1-x^2)} u \right] \\
&+ (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m(1-x^2)}{(1-x^2)^2} u - \frac{2mx^2}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&= -(-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} - \frac{m^2 x^2}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&+ (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} - \frac{(m(1-x^2) + 2mx^2)}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&= -(-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} - \frac{m^2 x^2}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&+ (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} - \frac{m(1+x^2)}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} - \frac{m(1+x^2)}{(1-x^2)^2} u - \frac{mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} + \frac{m^2 x^2}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} + \frac{(m^2 x^2 - m(1+x^2))}{(1-x^2)^2} u \right] \\
&= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2mx}{(1-x^2)} \frac{du}{dx} + \frac{m((m-1)x^2 - 1)}{(1-x^2)^2} u \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} &= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2mx\frac{du}{dx} + \frac{m((m-1)x^2-1)}{(1-x^2)}u\right] \\
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} &= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2mx\frac{du}{dx} + \frac{m((m-1)x^2-1)}{(1-x^2)}u\right. \\
&\quad \left.- 2x\frac{du}{dx} + \frac{2mx^2}{(1-x^2)}u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx} + \frac{m((m-1)x^2-1+2x^2)}{(1-x^2)}u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx} + \frac{m((m+1)x^2-1)}{(1-x^2)}u\right] \\
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]y &= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{m((m+1)x^2-1)}{(1-x^2)}u + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx}\right. \\
&\quad \left.+ \left[\ell(\ell+1) + \frac{m((m+1)x^2-1)-m^2}{(1-x^2)}\right]u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx}\right. \\
&\quad \left.+ \left[\ell(\ell+1) + \frac{m((m+1)x^2-m-1)}{(1-x^2)}\right]u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx}\right. \\
&\quad \left.+ \left[\ell(\ell+1) + \frac{m((m+1)x^2-(m+1))}{(1-x^2)}\right]u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx}\right. \\
&\quad \left.+ \left[\ell(\ell+1) + \frac{m(m+1)(x^2-1)}{(1-x^2)}\right]u\right] \\
&= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx} + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]u\right].
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Ahora usamos la Regla de Leibniz

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} \right] &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k}{dx^k} (1-x^2) \frac{d^{m-k+2}}{dx^{m-k+2}} P_\ell \\ &= \binom{m}{0} (1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_\ell + \binom{m}{1} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell + \binom{m}{2} \frac{d^2}{dx^2} (1-x^2) \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ &= (1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_\ell - 2mx \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell - m(m-1) \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ \frac{d^m}{dx^m} \left[-2x \frac{dP_\ell}{dx} \right] &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k}{dx^k} (-2x) \frac{d^{m-k+1}}{dx^{m-k+1}} P_\ell \\ &= \binom{m}{0} (-2x) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell + \binom{m}{1} \frac{d}{dx} (-2x) \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ &= -2x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell - 2m \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ \frac{d^m}{dx^m} [\ell(\ell+1)P_\ell] &= \ell(\ell+1) \frac{d^m P_\ell}{dx^m} \\ \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell \right] &= (1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_\ell - 2mx \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell - m(m-1) \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ &\quad - 2x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell - 2m \frac{d^m}{dx^m} P_\ell + \ell(\ell+1) \frac{d^m P_\ell}{dx^m} \\ \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell \right] &= (1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_\ell - 2(m+1)x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell \\ &\quad + [\ell(\ell+1) - (m(m-1) + 2m)] \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell \right] &= (1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_\ell - 2(m+1)x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_\ell \\ &\quad + [\ell(\ell+1) - (m(m+1))] \frac{d^m}{dx^m} P_\ell \\ \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell \right] &= (1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{du}{dx} \\ &\quad + [\ell(\ell+1) - (m(m+1))] u = 0. \end{aligned}$$