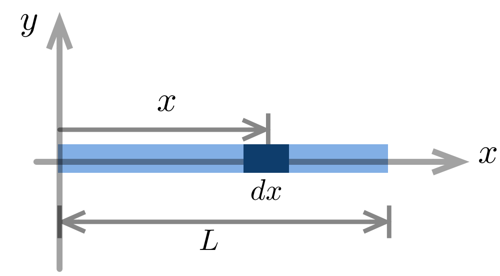
CÁLCULO DEL CENTRO DE MASA

Centro de masa de objetos unidimensionales

Cuando tenemos objetos unidimensionales, como una barra o un anillo, la situación es sencilla. Nuestro dm es una partícula y solo hay que hacer una integral para cada dirección.



Centro de masa de una barra

Para una barra de longitud L y masa M como la de la figura, podemos encontrar el centro de masa si consideramos una porción infinitesimalmente pequeña de su longitud, dx. La posición de esta pequeña porción es x, y la barra va de $0 < x < L$.

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

Entonces, como anticipamos, no podemos integrar x respecto a dm, por lo que

$$dm = \lambda dx$$

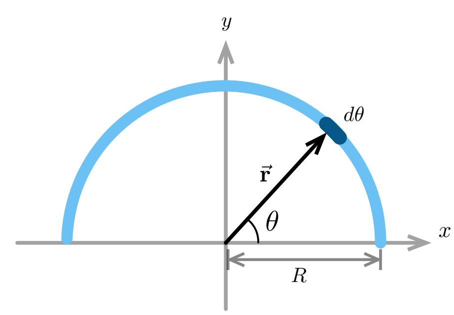
Vamos a suponer que $\lambda =$ const en toda la barra. También debemos recordar que $\lambda = M/L$. Entonces,

$$x_{CM} = \int_0^L \frac{1}{M} x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = \frac{\lambda}{M} \frac{L^2}{2}$$

o bien, sustituyendo la densidad,

$$x_{CM} = \frac{M}{ML} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

Centro de masa de medio anillo



$$\vec{\mathbf{r}} = R\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + R\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$dm = \lambda ds$$

$$ds = R d\theta$$

El anillo va $0 < \theta < \pi$

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{\mathbf{r}} dm = \frac{\lambda}{M} \int_0^{\pi} (R\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + R\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}) R d\theta = \frac{\lambda}{M} R^2 \left[\int_0^{\pi} \cos\theta d\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\,\hat{\mathbf{y}} \right]$$

las integrales

$$\int_0^{\pi} \cos\theta d\theta = \sin\theta|_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -\cos\theta|_0^{\pi} = 2$$

lo que implica

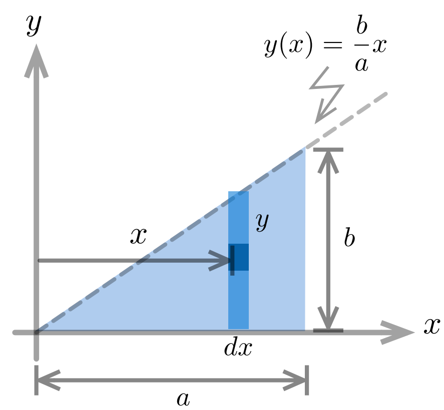
$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{\lambda}{M} R^2 \cdot 2\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{2M}{2\pi RM} R^2 \cdot 2\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{2R}{\pi}\,\hat{\mathbf{y}}$$

Como se espera por simetría, la componente en x del centro de masa es cero.

Centro de masa de objetos bidimensionales

Hay que hacer dos integrales por coordenada, una por cada dimensión. Esto se puede hacer de la siguiente manera: se divide la figura en muchos objetos unidimensionales. Se saca el centro de masa del objeto unidimensional y luego se integra para obtener la figura bidimensional original.

Centro de masa de un triángulo rectángulo



La ecuación de la recta que determina el triángulo es: $y(x) = (b/a)x$. Dividimos en pequeños rectángulos de altura $y(x)$ y base dx.

1. Posición en x del centro de masa

1.1. Primera integral: centro de masa de un rectángulo

Como el rectángulo es unidimensional, la coordenada x de su centro de masa está en su posición x.

$$x_{\text{CM,rect}} = x$$

1.2. Segunda integral: suma de los rectángulos

$$dm = \sigma y dx = \frac{2M}{ab} y dx$$

de la primera integral, tenemos que

$$dx_{CM} = \frac{1}{M} x dm$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int x\left(\frac{2M}{ab}\right) y dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy dx$$

es obligatorio expresar y en función de x. Para eso usamos la ecuación de la recta:

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right) dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3}a$$

2. Posición en y del centro de masa

2.1. Primera integral: centro de masa de un rectángulo

La posición en y del centro de masa del rectángulo es $y/2$, es decir,

$$y_{\text{CM,rect}} = \frac{y}{2}$$

2.2. Segunda integral: suma de los rectángulos

Como cada centro de masa de cada rectángulo está en $y/2$,

$$dy_{CM} = \frac{1}{M}\frac{y}{2}dm$$

donde

$$dm = \sigma y dx = \frac{2M}{ab} y dx$$

con lo que

$$y_{CM} = \int \frac{1}{M}\frac{y}{2}\left(\frac{2M}{ab}\right) y dx$$

simplificando,

$$y_{CM} = \int \frac{y^2}{ab} dx$$

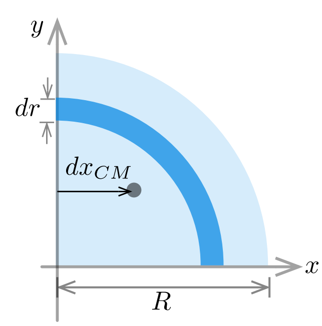
sustituyendo $y(x)$,

$$y_{CM} = \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{ab}\int_0^a x^2 dx = \frac{b}{3}$$

Por lo que el centro de masa se encuentra en

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{2}{3}a\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{3}\,\hat{\mathbf{y}}$$

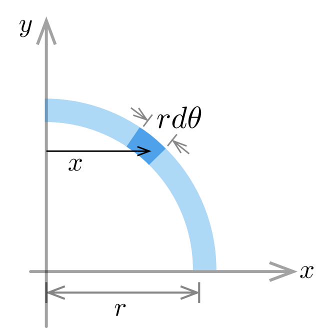
En general, se puede utilizar este procedimiento para calcular el centro de masa de cualquier figura cuya función $y(x)$ sea conocida.



Centro de masa un cuarto de disco

Hay varias formas de hacer este problema. Una de ellas sería seguir el procedimiento del triángulo, pero esto se alarga bastante. Para aprovechar la simetría del problema, usaremos coordenadas polares, tal y como lo hicimos con el medio anillo.

Vamos a calcular solamente la coordenada x del centro de masa, porque por simetría, la coordenada y debería dar igual.



Método 1: división en segmentos anulares

1.1. Primera integral: centro de masa de un segmento anular

$$x_{\text{CM,seg}} = \frac{1}{M}\int x dm$$

con

$$dm = \lambda r d\theta = \frac{M}{(\pi/2)r} r d\theta$$

y $x = r\cos\theta$. En un segmento anular, r es constante.

$$\begin{aligned} \implies x_{\text{CM,seg}} &= \frac{1}{M}\int r\cos\theta\left(\frac{2M}{\pi r}\right) r d\theta \\ &= \frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{2r}{\pi}\sin\theta\big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

1.2. Segunda integral: suma de segmentos anulares

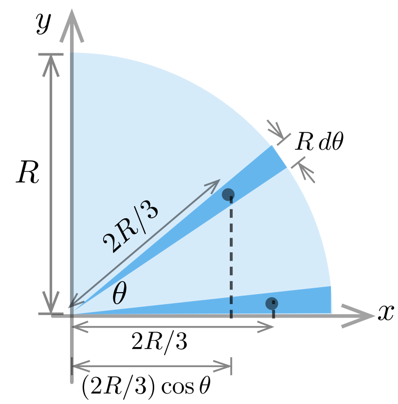
De la integral anterior,

$$dx_{CM} = \frac{1}{M}\frac{2r}{\pi}dm$$

con

$$dm = \sigma dA = \sigma(\text{arco})(\text{ancho del segmento}) = \left(\frac{4M}{\pi R^2}\right)\frac{\pi}{2} r dr$$

$$\implies x_{CM} = \frac{1}{M}\frac{4M}{\pi R^2}\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^R r^2 dr = \frac{4}{R^2\pi}\frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$



2. Segundo método: división en segmentos radiales

Para comparar, también incluimos cómo habría sido el procedimiento si hubiésemos dividido el cuarto de disco en segmentos radiales, como trozos de un pastel. Para simplificar, cada trozo es un triángulo rectángulo de base R y altura $Rd\theta$. Como la altura es infinitesimal, el trozo se comporta como un objeto unidimensional.

Primera integral: centro de masa de un triángulo rectángulo

Ya hicimos ese ejercicio, y como resultado obtuvimos que en la única dimensión de nuestro segmento, el centro de masa se encuentra a $x = 2a/3$.

Segunda integral: suma de triángulos

Sabemos que la posición en x del centro de masa de un triángulo en general, inclinado un ángulo θ, como se encuentra en la figura, es $x = (2R/3)\cos\theta$. Además, el diferencial de masa es ahora el del triángulo infinitesimal,

$$dm = \sigma dA = \left(\frac{4M}{\pi R^2}\right)\frac{R^2 d\theta}{2}$$

(la base es R, la altura es $Rd\theta$ y el área es base $\times$ altura/2)

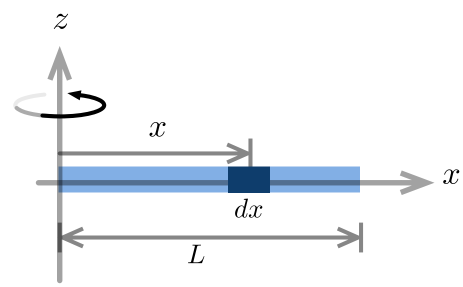
Con esto,

$$\begin{aligned} dx_{CM} &= \frac{1}{M}x_{\text{CM,segmento}}dm = \frac{1}{M}\frac{2R}{3}\cos\theta dm \\ \implies x_{CM} &= \frac{1}{M}\frac{2R}{3}\int\cos\theta\frac{4M}{\pi R^2}\frac{R^2}{2}d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{4R}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

Los resultados son iguales, pero obviamente el procedimiento de dividir en pequeños segmentos anulares fue más sencillo.

CÁLCULO DE MOMENTOS DE INERCIA



Barra alrededor de un eje perpendicular a un extremo

De forma infinitesimal

$$dI = r^2 dm$$

donde r es la distancia entre el eje de rotación y el elemento de masa dm.

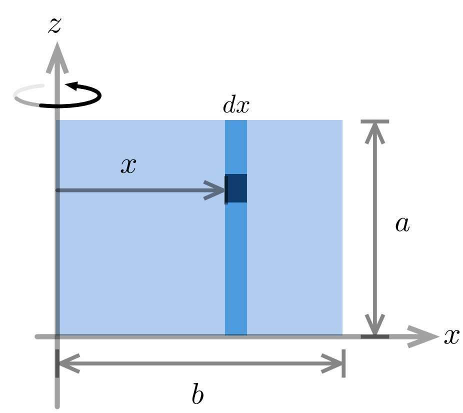
$$dm = \lambda dx; \quad r = x; \quad \lambda = M/L$$

Única integral: x:

$$I = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

Momento de inercia de objetos bidimensionales

Hay que hacer dos integrales por coordenada, una por cada dimensión. Esto se puede hacer de la siguiente manera: primero, se coloca correctamente en la figura el r (distancia al eje de rotación). Luego, se divide la figura en muchos objetos unidimensionales de modo que en cada figura tenga r constante. Se saca el momento de inercia del objeto unidimensional y se integra para obtener el momento de inercia de la figura original.



Placa alrededor de un eje que coincide con un lado

Primera integral: barra alrededor del eje z

Para una barra infinitesimal girando alrededor de su propio eje que pasa por su centro de masa, $I_{CM} = 0$. Eso significa que si aplicamos el teorema de ejes paralelos,

$$I = I_{CM} + mx^2 = mx^2$$

Segunda integral: suma de barras

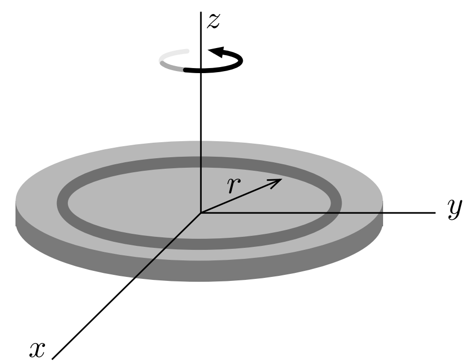
$$dI = x^2 dm$$

con

$$dm = \sigma a dx = \frac{M}{ab} a dx$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int x^2 dm = \int_0^b x^2 \left(\frac{M}{ab}\right) a dx = \frac{M}{b} \int_0^b x^2 dx = \frac{M}{b}\frac{b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

Disco (y anillo) alrededor de un eje perpendicular a su centro

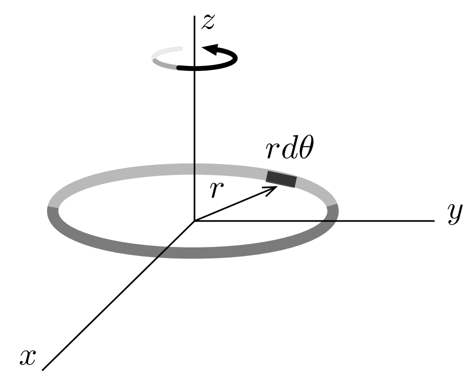


Identificamos r en el diagrama; coincide con el r de coordenadas polares. $r = \text{const}$ en ese caso es un anillo.

Primera integral: anillo

$$dm = \lambda r d\theta = \frac{M}{2\pi r} r d\theta$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} r^2 \frac{M}{2\pi} d\theta$$
$$= r^2 \frac{M}{2\pi} 2\pi = Mr^2$$



Segunda integral: disco

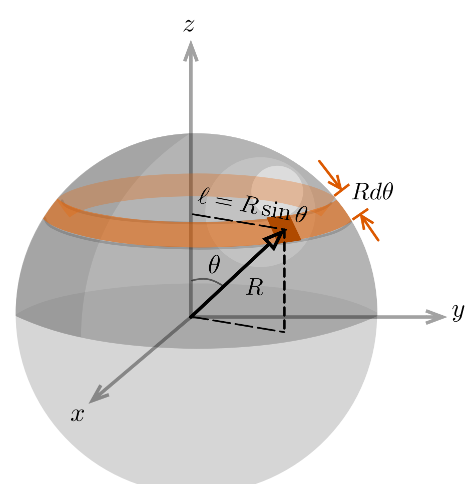
$$dm = \sigma 2\pi r dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$dI = r^2 dm$$
$$I = \int r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \int r^3 \frac{2M}{R^2} dr$$
$$= \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Momento de inercia de cascarones o sólidos de revolución

Se divide la figura en anillos o discos, según sea el caso, y se expresa su forma en términos de la variable de integración.

Cascarón esférico



Para evitar confusiones con los nombres de las variables, usamos ℓ como la distancia al eje de rotación. De la figura, se observa que $\ell = R\sin\theta$. R está dirigido radialmente hacia afuera en todas partes, y no solo en el plano xy.

Primera integral: anillo alrededor del eje z

Según el ejercicio anterior, el resultado dio $I_{\text{anillo}} = m\ell^2$.

Segunda integral: suma de anillos

$$dI = \ell^2 dm$$

donde $dm = \sigma dA = \sigma(\text{circunf.})(\text{ancho del anillo})$. El ancho del anillo es $Rd\theta$ (ver figura), y $\sigma = M/(4\pi R^2)$.

$$I = \int \ell^2 \left(\frac{M}{4\pi R^2}\right) 2\pi\ell R d\theta$$

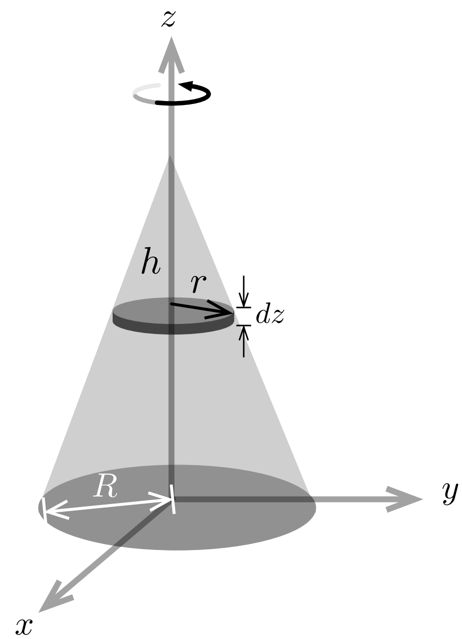
$$= \frac{MR^2}{2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

observe que el ángulo θ se extiende desde 0 hasta π únicamente, pues el anillo cubre "la otra mitad" de la esfera. La integral la podemos hacer así:

$$\int sin^2 \sin\theta d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \int (1-u^2) du$$

con la sustitución $u = \cos\theta$. Con esto, la integral da 4/3, con lo que el momento de inercia queda

$$I = \frac{MR^2}{2}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}MR^2$$



Cono sólido

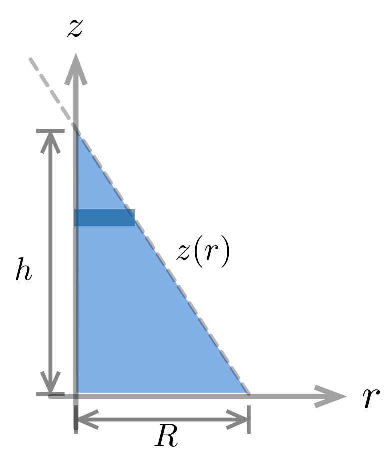
La primera integral es un anillo, la segunda es un disco, por lo que $I_{\text{disco}} = mr^2/2$.

Tercera integral: suma de discos

$$dI = \frac{r^2}{2} dm$$

con $dm = \rho dV$, y $dV =$ área disco $\times$ altura $= \pi r^2 dz$, y $\rho = M/V = 3M/(\pi R^2 h)$

$$\implies I = \int \frac{r^2}{2}\left(\frac{3M}{\pi R^2 h}\right)\pi r^2 dz$$
$$= \frac{3M}{2R^2 h}\int r^4 dz$$



Ahora, r no es constante con z. Según la figura inferior, podemos encontrar la ecuación de la recta como

$$z(r) = -\frac{h}{R}r + h \implies r(z) = R - \frac{R}{h}z$$

con lo que

$$I = \frac{3M}{2R^2 h}\int_0^h \left(R - \frac{Rz}{h}\right)^4 dz$$

sea $u = R - Rz/h \implies du = -Rdz/h$. Entonces,

$$I = -\frac{3M}{2R^2 h}\int_{\dots}^{\dots} u^4 \frac{h}{R} du$$
$$= -\frac{3M}{2R^2 h}\frac{h}{R}\left.\frac{u^5}{5}\right|_{\dots}^{\dots} = -\frac{3M}{10R^3}\left.\left(R - \frac{Rz}{h}\right)^5\right|_0^h$$
$$= \frac{3M}{10R^3}R^5 = \frac{3MR^2}{10}$$