Estadística

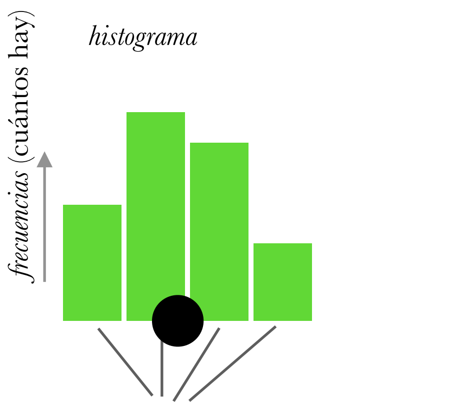
promedio

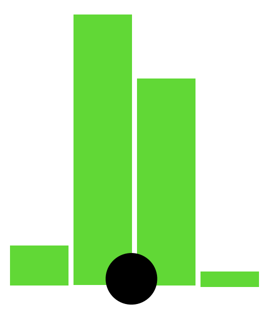
Si tomamos un individuo cualquiera de la población/muestra, ¿cuál será la edad o nota de un curso más representativa del grupo?

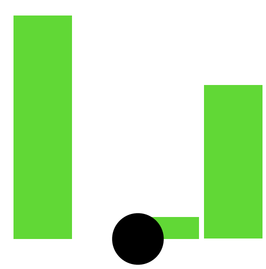
Se suman todos los datos y se distribuyen uniformemente por toda la población/muestra.

desviación estándar

¿Qué tanto varían los datos respecto al promedio?







clases (qué rangos de datos)

ejemplo: edades de un pueblo

Edades diversas, juventud grande

Hay poca natalidad y vejez, mucha juventud (inmigración)

Abuelos y nietos (emigración). ¡En promedio, el pueblo es joven aunque no haya nadie con la edad promedio!

ejemplo: curso con 4 exámenes parciales que valen lo mismo

Saqué 65, 70, 75 y 90 y me dio para pasar el curso con 70

Saqué 68, 70, 71 y 70 y pasé con 70

Saqué 30 y 50 (me sonaron), pero le puse y logré pegarme 90 y 100 y pasé con 70

Si no valen lo mismo los exámenes, se debe recurrir al concepto de *promedio ponderado.*

Lógica de la desviación estándar

probamos con…		pero, el problema es que…
cuánto varía el dato respecto al promedio	$x - \bar{x}$	solo vale para un dato, no el conjunto
el promedio de las diferencias	$\sum (x - \bar{x})/N$	las diferencias pueden ser negativas, y pueden cancelarse con las positivas
elevar al cuadrado para que las diferencias sean positivas y luego sacar raíz cuadrada	$\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2/N}$	aunque funciona para una **población** N, no funciona para una **muestra** n.
corrección estándar: $N \to n - 1$	$\sqrt{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}$	

Desviación estándar para una *muestra*

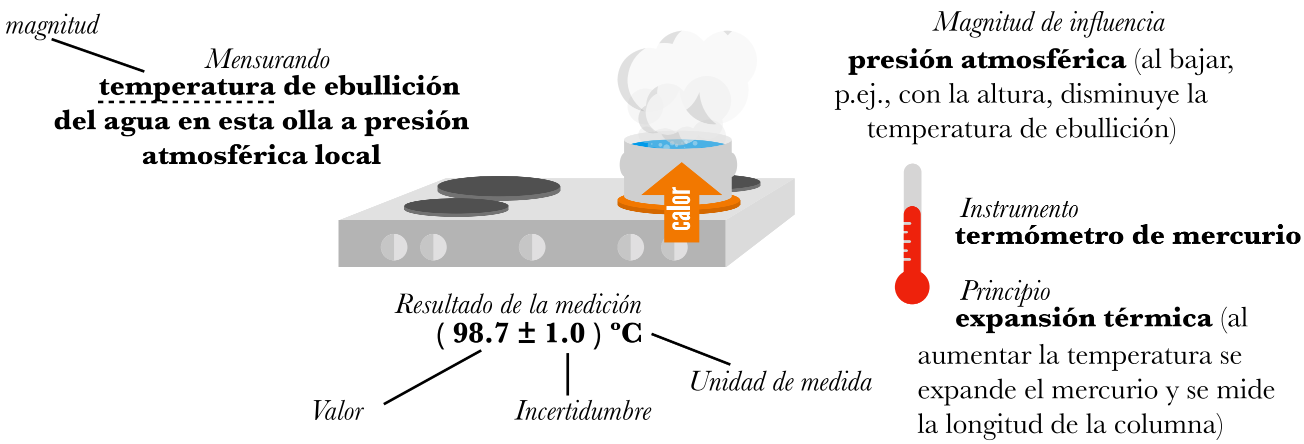
1 3

	A	B	C
	x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
1	1,3	0,208	0,043
2	1,2	0,108	0,012
3	0,8	-0,292	0,085
4	1,5	0,408	0,167
5	1,1	0,008	0,000
6	0,9	-0,192	0,037
7	1,0	-0,092	0,008
8	0,8	-0,292	0,085
9	1,2	0,108	0,012
10	1,4	0,308	0,095
11	1,1	0,008	0,000
12	0,8	-0,292	0,085

	D	E	
2 suma de datos	$\sum x$	13,100	1
número de datos	n	12	2
promedio	$\bar{x} = \sum x/n$	1,092	3
4 varianza corregida	$s^2 = \dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}$	0,057	4
desviación estándar corregida	$s = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}$	0,239	5

1. Llenar los datos
2. Suma de datos: `E1=SUMA(A1:A12)`. Número de datos: `E2=CONTAR(A1:A12)`. Promedio: `E3=E1/E2`
3. Diferencia de valores: `B1=A1-$E$3` (los signos de dólar son para evitar que se mueva la celda al rellenar hacia abajo). Cuadrado de la diferencia de valores: `C1=B1^2`. Rellenar hacia abajo.
4. Varianza corregida: `E4=SUMA(C1:C12)/(E2-1)`. Desviación estándar corregida: `E5=E4^0.5` (raíz cuadrada).

Definiciones de medición



GUM, ANEXO B

Magnitud (mensurable): atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia, que es susceptible de ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente. (Ej.: longitud, tiempo, masa, etc. Las magnitudes equivalentes o de la misma naturaleza forman categorías: p.ej., {calor, trabajo, energía}, {espesor, circunferencia})

Valor (de una magnitud): expresión cuantitativa de una magnitud particular, generalmente en forma de una unidad de medida multiplicada por un número. (Ej. 4 m; 0,152 kg) NOTA: **medir** es *comparar* con un *patrón* (unidad de medida) para determinar un valor.

Principio de una medida: base científica de una medición. (Ej.: el efecto X se usa para medir la magnitud Y)

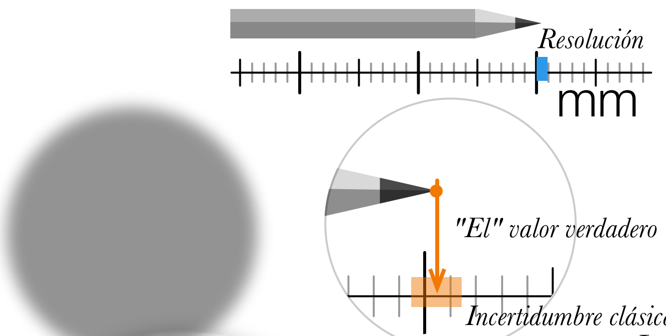
Método de medida: sucesión lógica de operaciones, descritas de una forma genérica, utilizadas en la ejecución de las mediciones. ("El área se mide con una regla milimetrada")

Procedimiento de medida: conjunto de operaciones, descritas de forma específica, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares, conforme a un método dado. ("Considere un paralelogramo ABCD. Con una regla, mida la longitud del segmento AB. Luego, con la misma regla y de forma perpendicular a AB, mida...")

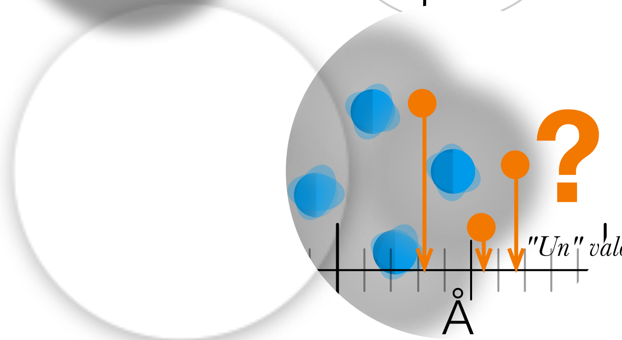
Incertidumbre

GUM, P. 11

A la hora de expresar el resultado de una medición de una magnitud física, es obligado dar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado, de forma que quienes utilizan dicho resultado puedan evaluar su idoneidad. Sin dicha indicación, las mediciones no pueden compararse entre sí.

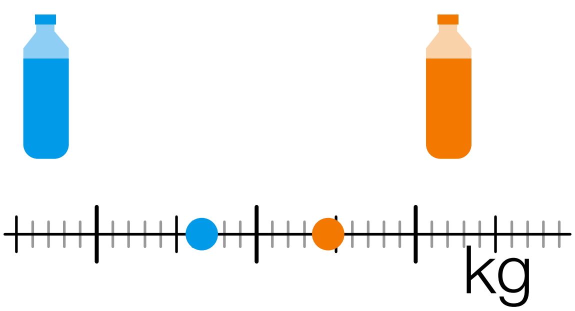


¿En qué "rayita" del instrumento cae la medición?

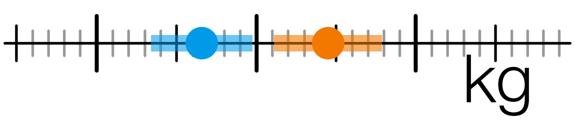


La incertidumbre no solo viene de la resolución del instrumento, sino también del método, fluctuaciones naturales de otros factores, etc. Al repetir el experimento pueden obtenerse diferentes valores, y la incertidumbre se obtiene a partir de la desviación estándar.

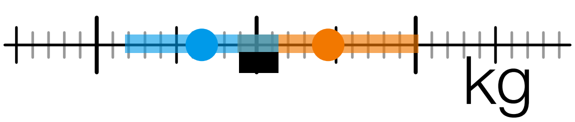
En escalas cercanas a 1 ángstrom, los efectos de mecánica cuántica agregan una incertidumbre teórica, ya no depende del instrumento o el método.



Estas dos mediciones no pueden compararse.



Ambas botellas no tienen la misma masa (los intervalos están separados).



Ambas botellas tienen la misma masa (los intervalos se traslapan).

MLAB1, P. 16

Mediciones directas: las que se hacen directamente con un instrumento de medición.

Mediciones indirectas: las que se obtienen mediante cálculos a partir de mediciones directas.

Incertidumbre estándar: para mediciones **directas** bajo condiciones de **repetibilidad**: $u_x = \dfrac{S_x}{\sqrt{n}}$, donde S_x es la desviación estándar.

Incertidumbre estándar de resolución: para una sola medida directa **sin repetir**: $u_a = \dfrac{\Delta a}{2\sqrt{3}}$, donde Δa es la resolución.

Regla de adición de las incertidumbres: $u_{\text{total}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots}$

Con cálculo: *Derivada parcial*: se hace como una derivada común pero se mantienen las demás variables como constantes: *Ejemplo*: sea $f(x, y) = 5xy + y^2$. Entonces, $\partial f/\partial x = 5y$ (la y es constante). Además, $\partial f/\partial y = 5x + 2y$ (la x es constante ahora).

Sin cálculo: *Teorema:* Para una función $y(a, b) = k a^p b^q$, donde k es una constante, el símbolo $\dfrac{\partial y}{\partial a}$ se llama *derivada parcial de* y *respecto a* a, y se calcula como $\dfrac{\partial y}{\partial a} = k p a^{p-1} b^q$, y el símbolo $\dfrac{\partial y}{\partial b}$ se llama *derivada parcial de* y *respecto a* b, y se calcula como $\dfrac{\partial y}{\partial b} = k q a^p b^{q-1}$. No confundir el símbolo ∂ (que aprenderá en cálculo superior) con la letra d (que aprenderá en cálculo diferencial e integral). El tipo de funciones de este teorema son las más frecuentes en este curso, pero no las únicas en la vida diaria, pero se necesita el curso de cálculo diferencial e integral para calcular sus derivadas.

Ejemplo 1: el área de un triángulo es $A = \dfrac{1}{2}bh$. Calcule $\dfrac{\partial A}{\partial b}$ y $\dfrac{\partial A}{\partial h}$.

En este caso, $k = 1/2$, $a \to b$, $b \to h$, $p = 1$, $q = 1$. Entonces, $\dfrac{\partial A}{\partial b} = \dfrac{1}{2}b^{1-1}h^1 = \dfrac{1}{2}h$. Además, $\dfrac{\partial A}{\partial h} = \dfrac{1}{2}b^1 h^{1-1} = \dfrac{1}{2}b$.

Ejemplo 2: el período T (cuánto tarda en dar una vuelta) de un péndulo está determinado por $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, donde ℓ es la longitud de la cuerda que sostiene el péndulo, y g es la aceleración de la gravedad. Calcule $\dfrac{\partial T}{\partial \ell}$ y $\dfrac{\partial T}{\partial g}$.

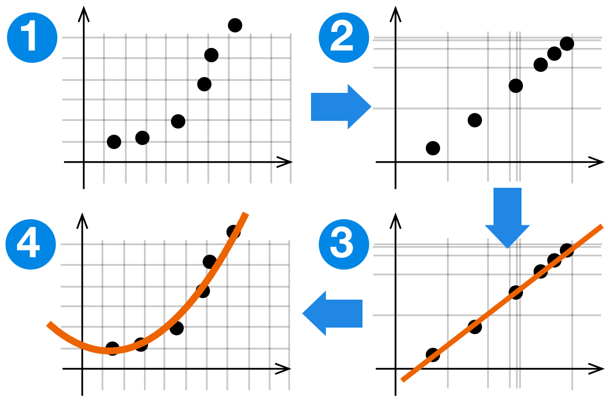
Podemos escribir el periodo como $T = 2\pi\ell^{1/2}g^{-1/2}$, con lo que $k = 2\pi$, $a \to \ell$, $b \to g$, $p = 1/2$, $q = -1/2$. Entonces, $\dfrac{\partial T}{\partial \ell} = 2\pi\dfrac{1}{2}\ell^{1/2-1}g^{-1/2} = \pi\ell^{-1/2}g^{-1/2}$. Además, $\dfrac{\partial T}{\partial g} = 2\pi\dfrac{1}{2}\ell^{1/2}g^{-1/2-1} = \pi\ell^{1/2}g^{-3/2}$.

Incertidumbre combinada: sea una función $y(a, b)$. El valor se obtiene con $\bar{y}(\bar{a}, \bar{b})$. La incertidumbre se obtiene con

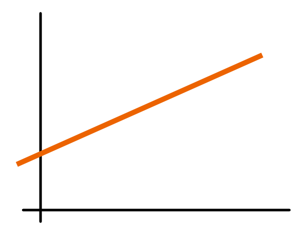
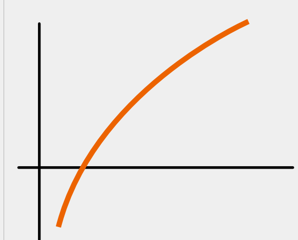
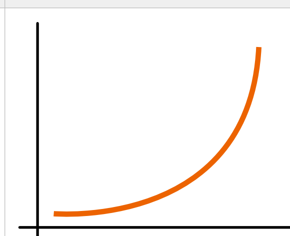
$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 u_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 u_b^2}$$

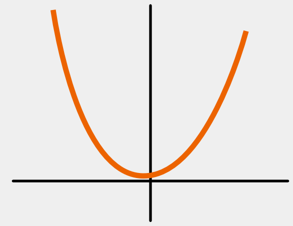
donde las derivadas parciales se evalúan en las variables promedio $(\bar{a}, \bar{b})$, y las incertidumbres u_a y u_b son las asociadas a las variables a y b. Esta es una incertidumbre para mediciones **indirectas.**

Cambio de variable



1. Se tienen datos, pero no se sabe cómo sacar la ecuación de mejor ajuste.
2. Se hace una transformación para que los datos formen una línea recta (ver tabla adjunta).
3. Cuando los datos se alinean, se saca la ecuación de la recta, $Y = MX+B$
4. Se hace la transformación inversa para obtener la ecuación original, $y(x)$.

La gráfica se ve como una recta cuando...	**Transformación inv. de** $Y = mX + b$	**Resultado de la transformación inv.**	**Gráfica aproximada transformada**
Lineal en ambos ejes	Ninguna	$y = mx + b$	
Logarítmica en X Lineal en Y	$X = \ln x$ $Y = y$	$y(x) = m \ln x + b$	
Lineal en X Logarítmica en Y	$X = x$ $Y = \ln y$	$y(x) = e^{mx}e^{b} = Ce^{mx}$	

La gráfica se ve como una recta cuando...	**Transformación inv. de** $Y = mX + b$	**Resultado de la transformación inv.**	**Gráfica aproximada transformada**
Logarítmica en ambos ejes	$X = \ln x$ $Y = \ln y$ u otro logaritmo, p.ej., $X = \log x$ $Y = \log y$	$y(x) = e^b x^m = Cx^m$ o bien $y(x) = 10^b x^m = Cx^m$	 (m=2)

En todos los casos, $m = \dfrac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ (observe que son las variables en mayúscula).

Hay otros casos donde se pide la **transformación directa**, que consiste en encontrar la ecuación $Y = MX + B$ a partir de **la relación teórica** $y(x)$. Por ejemplo, consideremos la ecuación $T(L) = 2\pi\sqrt{L/g}$. Para linealizar la ecuación, apartamos m para obtener

$$T(L) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) L^{1/2}$$

De allí mismo podríamos hacer $Y = T$, $X = L^{1/2}$.

Además, podríamos haber aplicado logaritmo a ambos lados de la ecuación,

$$\log T = \log\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) + \log L^{1/2} \implies \log T = \log\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) + \frac{1}{2}\log L$$

con lo que identificamos $Y = \log T$ y $X = \log L$.

A continuación, la tabla de sugerencias para transformaciones *directas*.

Función	**Transformación**	**Forma lineal**
Exponencial: $y = ae^{bx}$	$Y = \ln(y)$ $X = x$ $B = \ln(a)$ $m = b$	$Y = B + mX$
Potencial: $y = ax^b$	$Y = \log(y)$ $X = \log(x)$ $B = \log(a)$ $m = b$	$Y = B + mX$
Recíproca: $y = a + b\frac{1}{x}$	$Y = y$ $X = \dfrac{1}{x}$ $m = b$	$Y = a + mX$
Potencial modificada: $y = A + ax^b$	$Y = y$ $X = x^b$ $m = a$	$Y = A + mX$

Ecuación de la recta

La ecuación de una recta se puede determinar "a ojo", pero entonces todas las rectas determinadas por personas diferentes serían diferentes. Se requiere un método para eliminar el sesgo humano.

El método de los **mínimos cuadrados** consiste en minimizar los cuadrados de las diferencias entre el valor y_i del dato y el valor $y_{MC}(x_i)$ de la recta de mejor ajuste evaluada en el valor x_i.

Ecuación de la recta: $y_{MC}(x) = m\,x + b$, número de datos: n, valor del dato: (x_i, y_i).

Pendiente: $m = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

Intercepto: $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \sum_{i=1}^{n}y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

Coeficiente de correlación: $r = \dfrac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2 \cdot \sum(y - \bar{y})^2}}$. Indica cuán buena es la ecuación de la recta.

Referencias

GUM *Guía para la expresión de la incertidumbre de la medida.* (2008). Centro Español de Metrología.

MLAB1 *Manual de laboratorio de Física General I* (2015). Instituto Tecnológico de Costa Rica.