anexo
Apuntes adicionales 1

Origen de las ecuaciones del movimiento con aceleración constante

A continuación vamos a demostrar que las ecuaciones del movimiento con aceleración constante son:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 & (1) \\ v = v_0 + a t & (2) \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) & (3) \end{cases}$$

Parte 1: demostración de la ecuación (2)

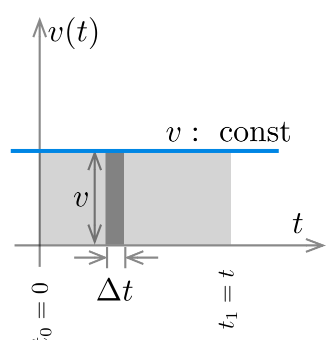
Si el movimiento es con aceleración *constante*, la aceleración media coincide con la aceleración instantánea en todo momento ($\overline{a} = a$). Utilizamos la definición de la aceleración media para obtener la velocidad instantánea:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \implies a t = v - v_0 \implies v(t) = v_0 + a t$$

Vea que la velocidad instantánea es una función lineal del tiempo.

Parte 2: demostración de la ecuación (1)

Considere la gráfica de la velocidad contra el tiempo del *movimiento rectilíneo uniforme*:



Hay dos rectángulos sombreados, uno pequeño y uno grande. Observe que el área del rectángulo sombreado pequeño es el desplazamiento:

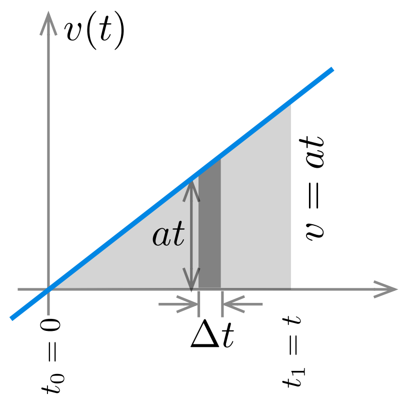
área peq. = base × altura = $v\Delta t$, pero como $v = \Delta x / \Delta t \implies$ área peq. = $\Delta x = v\Delta t$, con Δt peq.

Para obtener el desplazamiento total desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, sumamos un montón de esos rectángulos pequeños hasta formar el rectángulo grande sombreado, cuya área sería el desplazamiento total:

$$\Delta x_{\text{total}} = v(t-0) \implies x(t) - x_0 = vt \implies x = x_0 + vt$$

que es la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme.

Ahora vamos a repetir lo mismo con el movimiento con aceleración constante. Sabemos que $v(t)$ es la función lineal $v(t) = v_0 + at$. Vamos a hacer, por simplicidad, el caso cuando $v_0 = 0$. Graficamos entonces la función $v(t) = at$:



Ahora nos fijamos en el rectángulo sombreado pequeño, que nuevamente representa el desplazamiento para un tiempo pequeño:

$$\Delta x = \text{base} \times \text{altura} = v\Delta t, \ \Delta t \text{ peq.}$$

Usted seguramente se preguntará por qué decimos que es un rectángulo, si más bien esa área pequeña sombreada tiene la parte de arriba truncada. Lo que decimos es que entre más pequeño sea el Δt, más parecido será ese pedazo a un rectángulo.

Ahora, para obtener el desplazamiento total, hay que sumar esas pequeñas áreas sombreadas hasta formar el triángulo sombreado. El área de ese triángulo sombreado es

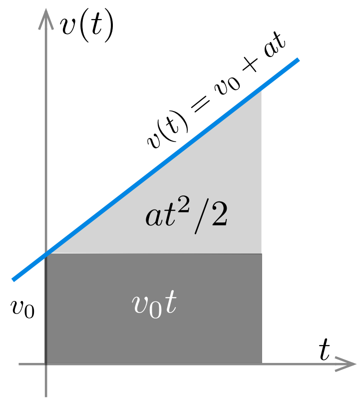
$$\Delta x_{\text{total}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{t \cdot v(t)}{2}$$

Pero sabemos que $v(t) = at$, por lo que nos queda el desplazamiento total como

$$\Delta x_{\text{total}} = \frac{t \cdot (at)}{2} = \frac{at^2}{2}$$

o sea que $x - x_0 = \dfrac{at^2}{2}$

Por último, ¿recuerda ud. que al principio dijimos que íbamos a poner $v_0 = 0$? Ahora hagamos la gráfica que considera una velocidad inicial:



Como vemos, el área bajo la curva ahora es la suma de las dos áreas, la del rectángulo y la del triángulo. Entonces, el desplazamiento total es:

$$\Delta x_{\text{total}} = \frac{at^2}{2} + v_0 t$$

con lo que finalmente llegamos a que

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \implies x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

que era la ecuación que queríamos demostrar. Este método de áreas bajo la curva en cálculo se llama la **integral**.

Parte 3: demostración de la ecuación (3)

Recordemos las dos ecuaciones que llevamos demostradas:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 & (1) \\ v = v_0 + at & (2) \end{cases}$$

Despejemos el tiempo de (2):

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Ahora, sustituyámoslo en (1):

$$x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

Pasemos el x_0 al lado izquierdo, apliquemos ley distributiva en el segundo término de la derecha y desarrollemos la fórmula notable cuadrática:

$$x - x_0 = \frac{v_0 v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2a}(v^2 + v_0^2 - 2v\,v_0)$$

Ahora, ley distributiva en el término entre paréntesis:

$$x - x_0 = \cancel{\frac{v_0 v}{a}} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} - \cancel{\frac{v\,v_0}{a}}$$

Ahora, restamos los dos términos que tienen v_0^2:

$$x - x_0 = -\frac{v_0^2}{2a} + \frac{v^2}{2a}$$

Mandamos el $2a$ a multiplicar:

$$\implies 2a(x - x_0) = -v_0^2 + v^2$$

y por último, obtenemos la ecuación que buscábamos:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Ejemplos de mov. ac. const.

Ejemplo 3.5. *Ciclista.*

Un ciclista se acelera a $5\,\mathrm{m/s^2}$ desde el reposo en un terreno plano, en una distancia de $10\,\mathrm{m}$. Calcule su velocidad final y el tiempo que le toma acelerar.

Solución: El reposo significa que $v_0 = 0$. Usamos primero la ecuación $v^2 = 2a(x - x_0) = 2(5)(10) \implies v = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{m/s}$ (son $36\,\mathrm{km/h}$). Para encontrar el tiempo de aceleración podemos usar $t = v/a = 10/5 = 2\,\mathrm{s}$

Ejemplo 3.6. *Diseño de un aeropuerto.*

Usted debe diseñar un aeropuerto. La pista debe permitir el aterrizaje de un avión que se aproxima a $300\,\mathrm{km/h}$; los frenos solo permiten una aceleración de magnitud $0.87\,\mathrm{m/s^2}$. Calcule el largo que debe tener la pista y el tiempo que tardará el aterrizaje.

Solución: (¡Haga el dibujo!) Colocamos nuestro marco de referencia en el inicio de la pista; hacia adelante positivo. Entonces, $a = -0.87\,\mathrm{m/s^2}$, y $v_0 = 300\,\mathrm{km/h} \approx 83.3\,\mathrm{m/s}$. Para el largo de la pista podemos usar

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \implies -v_0^2 = 2ax \implies x = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-83.3^2}{2 \times -0.87} = 3\,988\,\mathrm{m} \approx 4\,\mathrm{km}$$

Caída libre

3.7 Caída libre

La caída libre de un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra está descrita por un movimiento con aceleración constante $a = -g = -9.8\,\mathrm{m/s^2}$

Advertencia
Un error común a la hora de tratar con caída libre es pensar que la velocidad final de un objeto que cae es cero. Siempre nos referimos a la velocidad un instante antes de que colisione contra el suelo. Antes de chocar, la velocidad no es cero. Las colisiones las estudiaremos después, así que lo que pase con el objeto después de tocar el suelo no nos interesa por ahora.

(si elegimos positivo hacia arriba). Las ecuaciones del movimiento quedan

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v = v_0 - g t \\ v^2 = v_0^2 - 2g(x - x_0) \end{cases}$$

con $g = +9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

Obsérvese que la caída libre no depende de la masa. Objetos de diferente masa caen exactamente de la misma manera. La única razón por la que objetos como el papel o un paracaídas caen de forma diferente es la resistencia del aire, que veremos más adelante.

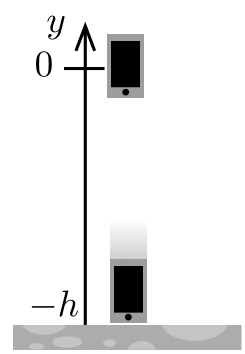
Ejemplo 3.9. *Gravedad en la Luna.*

En la Luna, la gravedad es $g_L = 1.6\,\mathrm{m/s^2}$. ¿Cuántas veces es mayor el tiempo de caída de un objeto por un metro respecto a la Tierra? Suponga que el objeto se suelta desde el reposo.

Solución: En la Tierra, el tiempo que tarda un objeto en caer un metro es $-1 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 \implies t = 0.45\,\mathrm{s}$. En la Luna, el tiempo es $-1 = -\frac{1}{2}(1.6)t^2 \implies t = 1.12\,\mathrm{s}$. Por lo tanto, $t_L/t_T = 2.49$, es decir, el tiempo de caída en la Luna es 2.49 veces mayor para la situación del ejemplo.

Ejemplo adicional:

Usted diseña un teléfono celular de forma que soporte caídas desde una altura de 1.5 m sobre el suelo. a) ¿Cuál es la velocidad del celular justo antes de tocar el suelo? b) Si la colisión contra el suelo dura 0.1 s y el celular queda al final en reposo, ¿cuál aceleración media debe soportar el material del celular? c) Si el celular se lanza hacia arriba con una rapidez de 2 m/s, ¿la velocidad final es mayor, menor o igual que si simplemente se deja caer? d) Si el celular se lanza hacia abajo con una rapidez de 2 m/s, ¿la velocidad final es mayor, menor o igual que si simplemente se deja caer? ¿y que el punto *c)*?



Solución:

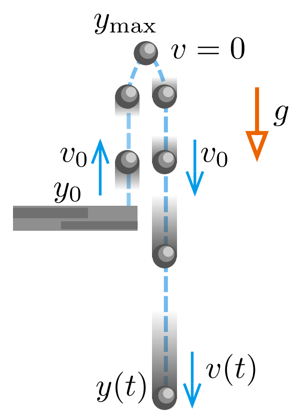
Vamos a elegir nuestro marco de referencia como está en el diagrama: en la posición inicial y positivo hacia arriba. Es importante ver que aquí hay **dos** movimientos, no solo uno: el de caída libre del celular y el de frenado del celular producto de la colisión.

a) (caída del celular) Podemos utilizar la ecuación que no tiene tiempo:
$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \implies v = \pm\sqrt{0^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot (-1.5 - 0)} = -\sqrt{+2 \cdot 9.8 \cdot 1.5} = -5.42\,\mathrm{m/s}$
La raíz puede tener signo positivo o negativo; en este caso, debe ser negativo, puesto que según nuestro marco de referencia, el celular va cayendo, y para abajo es negativo.

b) (frenado por la colisión) Utilizamos la definición de aceleración media:
$\bar{a}_{\text{frenado}} = \dfrac{v_{\text{frenado}} - v_{0,\text{frenado}}}{\Delta t_{\text{frenado}}} = \dfrac{0 - (-5.42)}{0.1} = 54.2\,\mathrm{m/s^2}$
que es positiva, como debe ser, porque para frenar el celular se requiere una aceleración para arriba.

c) En el caso en el que se lance hacia arriba, la velocidad final será mayor, puesto que ahora tendremos una velocidad inicial:
$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \implies v = -5.6\,\mathrm{m/s}.$

d) Si se lanza hacia abajo, el resultado es el mismo que si se lanza hacia arriba:
$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \implies v = -5.6\,\mathrm{m/s}$
La razón es que si se lanza hacia arriba, cuando el celular sube y luego comienza a bajar y pasa por el punto de lanzamiento de regreso, lo hace con la misma rapidez que cuando fue lanzado, solo que hacia abajo (ver figura a la derecha).



Movimiento relativo

3.8 Movimiento relativo en 1D

La posición de la persona P respecto al tren T es x_{PT}. La posición del tren respecto a un observador parado en el suelo S es x_{TS}. La posición de la persona respecto al suelo es entonces $x_{PS} = x_{PT} + x_{TS}$.

La velocidad es el cambio de posición en el tiempo, por lo que también la velocidad de la persona respecto al suelo es $v_{PS} = v_{PT} + v_{TS}$.

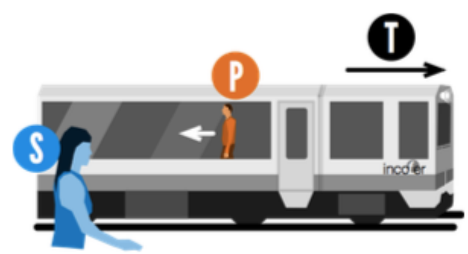
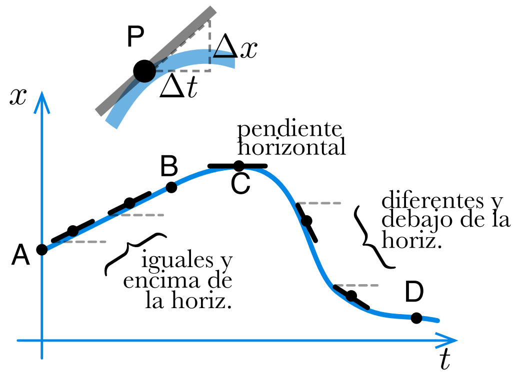


Figura 3.6: Movimiento relativo

Ejemplo 3.11. *Tren.*

En la figura, suponga x positivo es hacia la derecha. La persona se mueve hacia atrás en el tren con una rapidez de $v_{PT} = -1\,\mathrm{m/s}$, pero el tren se mueve hacia la derecha con una rapidez de $v_{TS} = 5\,\mathrm{m/s}$. Esto significa que, respecto al suelo, la persona se mueve con una rapidez de $v_{PS} = v_{PT} + v_{TS} = -1 + 5 = +4\,\mathrm{m/s}$. Es decir, para alguien sentado sobre el tren, la persona P se mueve hacia la izquierda, pero para un observador en el suelo S, la persona se mueve hacia la derecha.

Gráficas de posición contra tiempo



Observe la sección ampliada de la gráfica (donde está el punto P), que representa una parte de la curva (azul) en la que se ha marcado un punto. Se ha dibujado una recta que es tangente al punto (línea negra inclinada), la cual tiene una ecuación general $x = mt + b$ (nuestras variables son x y t). La pendiente de la recta es $m = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, con Δt pequeño (para que los dos puntos estén lo más unidos posibles y desde lejos se vea un solo punto, nuestro punto P). Es decir, la pendiente de la recta tangente a un punto en la gráfica de $x(t)$ representa la **velocidad instantánea** de la partícula. O sea que **la pendiente de la recta tangente es la derivada** (ud. lo verá en su curso de cálculo).

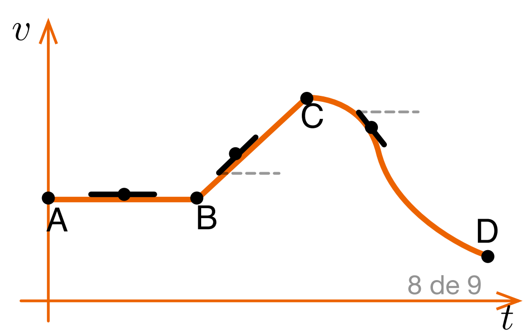
Entre los puntos A y B, la pendiente es la misma (recta con la misma inclinación), por lo que la velocidad es la misma, es decir, es constante. Además, observe que respecto a la línea horizontal, ambas pendientes forman un ángulo hacia arriba de la horizontal, con lo que diremos que la pendiente, es decir, la velocidad, es *positiva*.

En el punto C, la pendiente es horizontal. En ese caso, diremos que la velocidad en ese punto es *cero*.

Entre los puntos C y D, las pendientes son diferentes, por lo que diremos que las velocidades son también diferentes, por lo que en ese intervalo debe existir *aceleración*. Además, vemos que al trazar una horizontal, la pendiente cae en ambos casos por debajo, por lo que diremos que en ese intervalo la velocidad es *negativa*.

Gráficas de velocidad contra tiempo

Ahora, tenemos una gráfica de velocidad contra tiempo, que nada tiene que ver con el movimiento de la gráfica

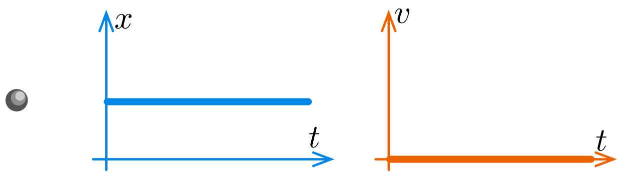


anterior. La pendiente de esta gráfica ahora será $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ con Δt pequeño, por lo que representa la **aceleración**.

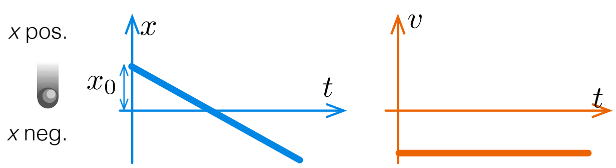
En el intervalo de A a B, la pendiente es cero, por lo que decimos que la velocidad es constante, y por ende, la aceleración es cero. En el intervalo de B a C, la gráfica es una recta, por lo que solo tiene una pendiente, y está por encima de la horizontal. Entonces, decimos que de B a C, la *aceleración es constante y positiva*. En el intervalo de C a D, en cambio, la gráfica es una curva (tiene pendientes diferentes en cada punto), pero todas las pendientes caen por debajo de la horizontal, por lo que decimos que de C a D, la aceleración es *variable y negativa.*

Ejemplos

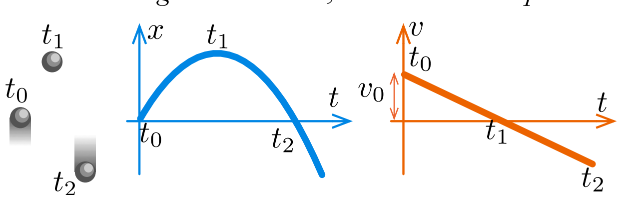
Cuerpo en reposo



Velocidad negativa constante



Aceleración negativa constante, velocidad inicial positiva



Note lo siguiente:

- El intercepto con el eje vertical da la posición y velocidades iniciales
- En la segunda gráfica, que la velocidad sea negativa indica que la pendiente es negativa (la partícula se mueve hacia x negativo); la velocidad negativa no significa que la posición deba ser negativa y viceversa. Un razonamiento similar vale para la aceleración.
- En la última gráfica, el tiempo t_1 corresponde a cuando la partícula deja de ir hacia x positivo y empieza a retroceder hacia x negativo; allí en efecto la velocidad es cero (cuando la gráfica de la velocidad atraviesa el eje t)