Tecnológico de Costa Rica

FÍSICA GENERAL I
MOMÉNTUM

André Oliva, BSc
Instituto Tecnológico de Costa Rica

1 Moméntum y colisiones

1.1 Segunda ley de Newton: moméntum

La segunda ley de Newton, tal y como él la planteó, dice que la fuerza es el cambio de moméntum en el tiempo:

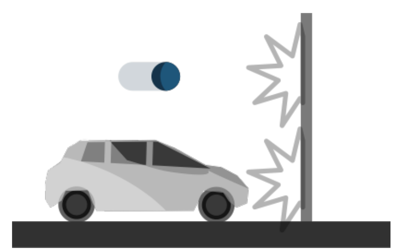
$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}$$

$\mathcal{U}[p] =$ kg m/s. El moméntum, ímpetu, cantidad de movimiento o momento (lineal) es una cantidad física definida como

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$$

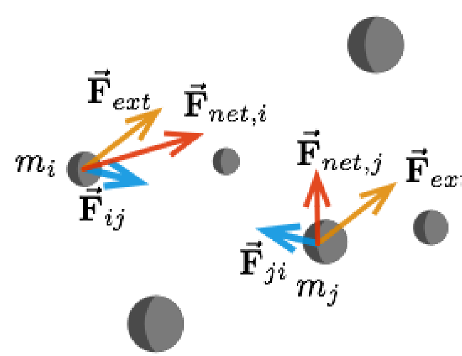
y siempre y cuando m sea constante,

$$\vec{\mathbf{F}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{\mathbf{a}}$$



De cierta forma, el moméntum nos da una idea del poder destructivo de una cosa. Por ejemplo, un carro de 1000 kg moviéndose a una velocidad muy baja de 0.3 m/s ($\approx$ 1 km/h) tiene un moméntum de 300 kg m/s. De la misma forma, una bala de 1 kg moviéndose a una velocidad casi supersónica de 300 m/s tiene, igual, un moméntum de 300 kg m/s. Ambos pueden causar destrucción en caso de una colisión contra una pared de madera delgada. En los huracanes, cualquier pedazo de madera suelto se convierte en un proyectil peligroso.

1.2 Conservación del moméntum en un sistema de partículas



Supongamos que tenemos un sistema de partículas que interactúan entre sí. Pueden ser estrellas, o partículas cargadas de un plasma, o moléculas, o cualquier otra cosa. Las partículas interactúan entre sí, por lo que, como ya habíamos notado de la tercera ley de Newton, para dos partículas i y j,

$$\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$$

Es decir, la magnitud de la fuerza es igual, pero ambas van en direcciones opuestas. Supongamos que hay una fuerza externa que afecta a todo el sistema; es decir, consideremos la interacción del sistema con su entorno. La fuerza neta sobre la partícula i es, entonces,

$$\vec{\mathbf{F}}_{net,i} = \vec{\mathbf{F}}_{ext} + \vec{\mathbf{F}}_{ij}$$

donde en realidad $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$ debería ser la fuerza neta de esa partícula con todas las demás que forman el sistema. Ahora bien, el moméntum total del sistema es

$$\vec{\mathbf{P}}_{total} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 + ... + \vec{\mathbf{p}}_i + ...$$

la derivada del moméntum respecto al tiempo es la fuerza:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{P}}_{total}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{F}}_{1,net} + \vec{\mathbf{F}}_{2,net} + ... + \vec{\mathbf{F}}_{i,net} + ...$$

y ahora ocurre un milagro: todas las fuerzas internas se cancelan entre sí. Por ejemplo, para las partículas 1 y 2:

$$\vec{\mathbf{F}}_{net,1} = \vec{\mathbf{F}}_{ext,1} + \vec{\mathbf{F}}_{12}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{net,2} = \vec{\mathbf{F}}_{ext,2} + \vec{\mathbf{F}}_{21}$$

$$\implies \vec{\mathbf{F}}_{net,1} + \vec{\mathbf{F}}_{net2} = \vec{\mathbf{F}}_{ext,1} + \vec{\mathbf{F}}_{ext,2} + \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{21}$$

$$= \vec{\mathbf{F}}_{ext,1} + \vec{\mathbf{F}}_{ext,2} + \vec{\mathbf{F}}_{12} - \vec{\mathbf{F}}_{12} = \vec{\mathbf{F}}_{ext,1} + \vec{\mathbf{F}}_{ext,2}$$

esto nos lleva a una conclusión muy importante: *si en un sistema no hay fuerzas externas, el moméntum total del sistema se conserva*, es decir

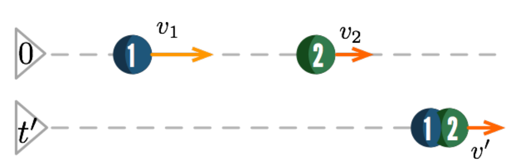
$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_{ext,i} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{P}}_{total}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{total} = \text{const}$$

Ahora, observemos que en ese sistema de estrellas, plasma, moléculas, etc. *la energía mecánica no necesariamente se conserva*. Una estrella puede explotar, otra puede succionar materia de otra (a este fenómeno se llama "acreción"), un agujero negro puede "tragarse" a otra estrella, de forma que hay procesos explosivos y disipativos, y por lo tanto la energía mecánica en general no se conserva. La energía total *sí* se conserva, pero no siempre podemos saber cuánta energía se libera en una explosión, o se disipa hacia el entorno en forma de radiación, por lo que la energía total no siempre sirve para hacer cálculos. Sin embargo, *solo basta con que el sistema no tenga fuerzas externas para que el moméntum sí se conserve*. Aún en ese sistema de estrellas tan convulso, el moméntum se conserva.

Vamos a aplicar este hecho a dos objetos que colisionan entre sí con diferentes propiedades.

1.3 Tipos de colisiones: colisión 1D inelástica



Tenemos dos cuerpos, 1 y 2. Al incio, 1 tenía una velocidad v_1, y 2 tenía una velocidad v_2; como es una situación unidimensional, los signos de ambas velocidades nos dicen la dirección en nuestro marco de referencia. Los cuerpos colisionan y después permanecen juntos, ambos moviéndose con una misma velocidad[1]. Por ejemplo, pueden haberse enganchado al colisionar. Entonces, sabiendo las masas m_1 y m_2, podemos averiguar la velocidad v' con la que al final ambos cuerpos se moverán:

$$P_{total} = \text{const} \implies P_{total} = P'_{total}$$

$$\implies m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \implies v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

[1] En esta colisión en particular las velocidades finales son iguales. No necesariamente tienen que ser iguales en una colisión inelástica.

Ejemplo 1.1. *¿Se conserva la energía cinética?.*

Si sustituimos valores numéricos, por ejemplo, que $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $v_1 = 5$, $v_2 = 3$, tenemos que $v' = 11/3 = 3.66\,\mathrm{m/s}$. Entonces, el moméntum antes de colisionar era $11\,\mathrm{kg\ m/s}$, y después de colisionar, también, $11\,\mathrm{kg\ m/s}$. Ahora bien, ¿se conserva la energía cinética?

Antes de la colisión, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 21.5\,\mathrm{J}$$

Después de la colisión, la energía cinética es

$$K' = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 = 20.2\,\mathrm{J}$$

¡La energía cinética disminuyó! La energía cinética no se conserva, pero el moméntum sí. Cuando la energía cinética disminuye en una colisión, esta se dice que es **inelástica**.

Entonces, la clasificación de las colisiones dependiendo de la conservación de la energía cinética es la siguiente:

- Si $K' > K$ la colisión se llama **superelástica** o **explosiva**.
- Si $K' = K$, la colisión es **elástica**.
- Si $K' < K$, la colisión es **inelástica**.

Siempre se conserva el moméntum total.

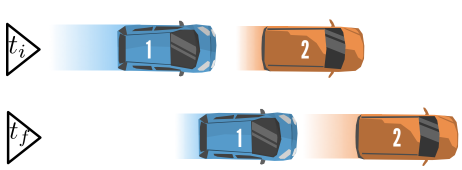
Ejemplo 1.2. *Bolas de masa.*

En una panadería, una bola de masa para hacer pizza es lanzada con velocidad v_0 hacia otra de masa tres veces menor, originalmente en reposo. Después de la colisión, que es inelástica, ambas bolas se pegan y se mantienen juntas. Calcule su velocidad final.

Solución: La masa de la bola en reposo es m, y la de la que llega a golpearla es $3m$. Al final, dado que ambas bolas se pegan, tienen la misma velocidad. Aplicamos conservación del moméntum:

$$3mv_0 = 3mv + mv \implies 3v_0 = 4v \implies v = \frac{3}{4}v_0$$

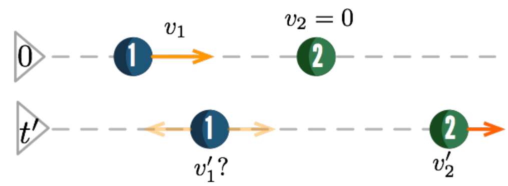
Ejemplo 1.3. *Análisis de choque de tránsito.*



Un carro de masa $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$ frena súbitamente, de forma que su velocidad se reduce a $v_{2ix} = 3\,\mathrm{m/s}$, cuando un carro de $m_1 = 1700\,\mathrm{kg}$ no logra detenerse a tiempo y lo colisiona. Al final de la colisión, el carro 1 redujo su velocidad a $v_{1fx} = 4\,\mathrm{m/s}$, y el carro 2 salió expulsado a $v_{2fx} = 6\,\mathrm{m/s}$. Despreciando el efecto de los frenos,

> calcule la velocidad con la que venía el carro 1.
>
> *Solución:* Utilizando conservación del moméntum, $v_{1ix} = (m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} - m_2 v_{2ix})/m_1 = 5.8\,\mathrm{m/s}$

1.4 Colisión 1D elástica



Vamos a analizar un caso particular de una colisión elástica, en la que la partícula 2 está originalmente en reposo. Entonces, tanto el moméntum como la energía cinética se conservan:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 {v'}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 {v'}_2^2 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Dadas las masas y la velocidad inicial de 1, podemos encontrar las dos velocidades finales. Si tuviéramos $v_2 \neq 0$, el sistema de ecuaciones se complica bastante, pero no es imposible de resolver de forma general. En cualquier caso, el sistema de ecuaciones se puede resolver fácilmente al sustituir primero los datos numéricos.

Tomamos la primera ecuación y despejamos v_2':

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_1'}{m_2}$$

introducimos en la segunda ecuación:

$$m_1 v_1^2 = m_1 {v_1'}^2 + m_2 \left(\frac{m_1 v_1 - m_1 v_1'}{m_2} \right)^2$$

ahora debemos desarrollar estos términos y simplificar. Al ordenarlos, queda

$$0 = (m_2 m_1 + m_1^2){v_1'}^2 - (2m_1^2 v_1)v_1' + (m_1^2 v_1^2 - m_2 m_1 v_1^2)$$

que es una ecuación cuadrática. Utilizamos la fórmula de solución de ecuaciones cuadráticas:

$$v_1' = \frac{+2m_1^2 v_1 \pm \sqrt{4m_1^4 v_1^2 - 4(m_2 m_1 + m_1^2)(m_1^2 v_1^2 - m_2 m_1 v_1^2)}}{2(m_2 m_1 + m_1^2)}$$

vamos a simplificar la raíz. Para ello, desarrollamos los términos internos y los sumamos (se cancelan varios términos). Al final, nos queda

$$v_1' = \frac{2m_1^2 v_1 \pm \sqrt{4m_2^2 m_1^2 v_1^2}}{2(m_2 m_1 + m_1^2)} = \frac{2m_1^2 v_1 \pm 2m_2 m_1 v_1}{2(m_2 m_1 + m_1^2)}$$

$$\implies v_1' = \left(\frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1$$

Ahora debemos decidir el signo de $\pm$. Según el diagrama, no sabemos la dirección de v_1', por lo que $v_1' > 0$ o bien $v_1' < 0$. La única elección de signos que nos permite ambas posibilidades es el menos. Vamos a confirmar más adelante esta elección. Con esto,

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1$$

y ahora sustituimos en nuestra expresión de v_2' para obtener:

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_1'}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} v_1 - m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1$$

$$= \frac{m_1(m_1 + m_2) - m_1(m_1 - m_2)}{m_2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1^2 + m_2 m_2 - m_1^2 + m_1 m_2}{m_2(m_1 + m_2)} v_1 = \frac{m_1 + m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

con lo que

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1$$

Entonces, finalmente,

$$\begin{cases} v_1' = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 \\ v_2' = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 \end{cases}$$

Ahora veamos varios casos de interés con los resultados que hemos obtenido.

- Si $m_1 = m_2$, entonces $v_1' = 0$ y $v_2' = v_1$. Entonces, lo que ocurre es un *intercambio de velocidades*, en la misma dirección. Eso ocurre al colisionar bolas de billar: como tienen la misma masa, si la bola 2 estaba en reposo al principio y la bola 1 viene y choca contra la bola 2, la bola 1 se detiene y la bola 2 toma su lugar, moviéndose con la misma velocidad que traía la bola 1.
- Si la masa de la bola 1 es muchísimo menor que la de la bola 2, eso significa que $m_1 \ll m_2 \implies m_1 \to 0$, entonces $v_1' = -v_1$, y $v_2' = 0$. Eso es lo que ocurre si una persona salta sobre la Tierra. En teoría, tanto la persona como la Tierra deberían moverse. Sin embargo, como la masa de la persona es insignificante comparada con la de la Tierra, el cambio de velocidad que sufre la Tierra es también insignificante.

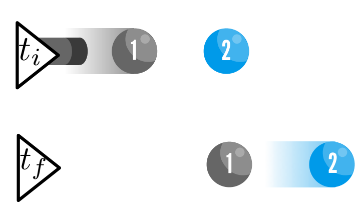
Ejemplo 1.4. *Colisión elástica.*

Una bola de masa m que viaja a velocidad $+v$ choca elásticamente contra otra de masa $2m$ que está en reposo. ¿Cuál es la velocidad final de cada una?

Según las ecuaciones que hemos derivado,

$$v_1' = \left(\frac{m - 2m}{m + 2m} \right) v = -\frac{1}{3} v$$

$$v_2' = \left(\frac{2m}{m + 2m} \right) v = \frac{2}{3} v$$



Ejemplo 1.5. *Billar.*

Las bolas de billar colisionan de forma aproximadamente elástica. Una bola de billar se encuentra en la mesa, en reposo, cuando otra bola idéntica llega a 4 m/s. Calcule las velocidades finales de ambas bolas.

Solución: Como las bolas colisionan elásticamente, el moméntum y la energía cinética se conservan:

$$\begin{cases} [m_1 v_1 + m_2 v_2]_i = [m_1 v_1 + m_2 v_2]_f \\ [\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2]_i = [\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2]_f \end{cases}$$

Para simplificar el álgebra, llamemos v a la velocidad final de la bola 1 y u a la velocidad final de la bola 2. Las bolas son idénticas, por lo que sus masas son iguales y se cancelarán a ambos lados de las ecuaciones. Entonces:

$$\begin{cases} 4 = v + u \\ 16 = v^2 + u^2 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $u = 4 - v$, con lo que, sustituyendo en la segunda ecuación,

$$16 = v^2 + (4 - v)^2 \implies 16 = v^2 + 16 - 8v + v^2$$

$$\implies 2v^2 - 8v = 0$$

con lo cual o bien $v = 4 = v_{1fx}$, o bien $v = 0 = v_{1fx}$. Si tomamos la primera opción, y sustituimos en la primera ecuación, tenemos que $u = 0 = v_{2fx}$. Esto no puede ser, puesto que significaría que la bola 1 atraviesa la bola 2 (como si fuera un fantasma) mientras que la bola 2 queda en reposo. Por lo tanto, la opción correcta es

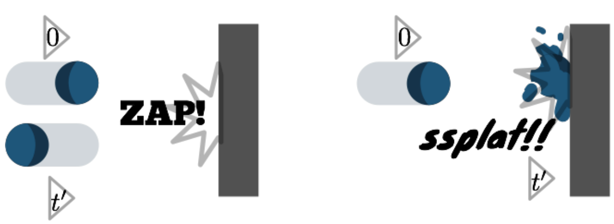
$$v = v_{1fx} = 0$$

con lo que

$$u = 4 - v = v_{2fx} = 4\,\mathrm{m/s}$$

es decir, al colisionar las bolas de billar "intercambian velocidades".

1.5 Colisiones contra una pared



Del análisis anterior podemos ver que si chocamos elásticamente con un cuerpo de masa muchísimo más grande que la nuestra, la velocidad sencillamente se reversa. A la izquierda tenemos una colisión de este tipo, elástica. El cambio de moméntum que sufre la bola es

$$\Delta p = p' - p = mv' - mv = -mv - mv = -2mv$$

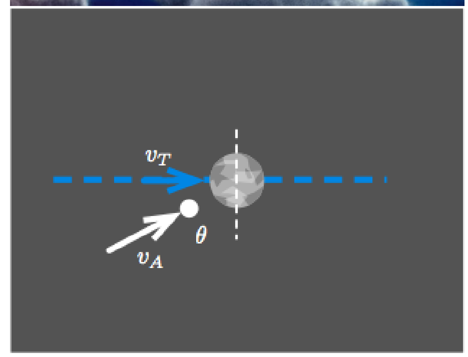
El cambio de moméntum que sufre la pared, por lo tanto, es de $+2mv$, sin embargo, esta no se mueve. *Una pared ideal rígida puede absorber una cantidad infinita de moméntum*. En la realidad, esto no es cierto. La Tierra puede absorber el moméntum de una persona que salta sobre ella, e incluso el moméntum de un cometa o asteroide pequeño, pero si hubiera una colisión con un asteroide muy grande, podría haber cambios en su órbita.

En cambio, a la derecha tenemos una colisión **totalmente inelástica**. En esta colisión, el objeto venía con una rapidez $+v$, pero después de colisionar, la velocidad se reduce a 0. Entonces, el cambio de moméntum sufrido por la bola sería

$$\Delta p = p' - p = 0 - mv = -mv$$

Y la energía cinética del sistema sería, al principio, $K = \frac{1}{2}mv^2$, y al final, $K' = 0$. Toda la energía cinética se pierde. Entonces, la máxima energía transformable en calor es

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$



Ejemplo 1.6. *Extinción de los dinosaurios.*

Suponga que el asteroide que chocó contra la Tierra y ayudó a extinguir a los dinosaurios (extinción masiva del límite K/T) traía una rapidez inicial de $v_A = 47\,\text{km/s}$ respecto a un marco de referencia en el Sol, y chocó en un ángulo de $\theta = 40^\circ$ respecto al eje de rotación de la Tierra. La Tierra se movía a $v_T = 29\,\text{km/s}$ respecto al mismo marco de referencia en el Sol. La masa de la Tierra es $m_T = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, y el asteroide tiene un diámetro de $d_A = 10\,\text{km}$ y densidad $\rho_A = 2600\,\text{kg/m}^3$ a) Calcule la velocidad y rapidez finales de la Tierra. b) Calcule la máxima cantidad de energía cinética transformable en calor.

Masa del asteroide:

$$m_A = \rho_A \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 1.36 \cdot 10^{15}\,\text{kg}$$

Conservación del moméntum en x:

$$m_A v_A \sin\theta + m_T v_T = (m_A + m_T)v'_x \implies v'_x = 2.9 \cdot 10^4\,\text{m/s}$$

Conservación del moméntum en y:

$$m_A v_A \cos\theta = (m_A + m_T)v'_y \implies v'_y = 8.16 \cdot 10^{-6}\,\text{m/s}$$

a) La velocidad final es

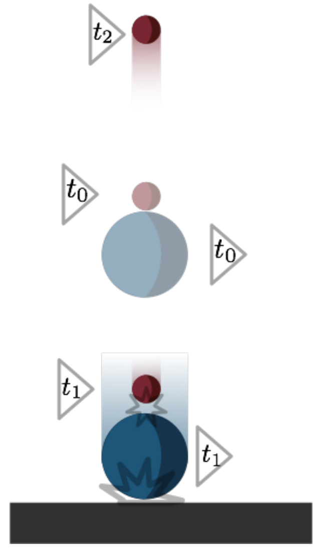
$$\vec{\mathbf{v}}' = (8.16 \cdot 10^{-6}\,\hat{\mathbf{x}} + 2.9 \cdot 10^4\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{m/s}$$

La rapidez final es $v' = 29\,\text{km/s}$, imperceptiblemente mayor que antes.

b) Para la energía convertible en calor es necesario encontrar la rapidez relativa del asteroide respecto a la Tierra:

$$|\vec{\mathbf{v}}_{AT}| = |\vec{\mathbf{v}}_A - \vec{\mathbf{v}}_T| = \sqrt{(47\sin 40^\circ - 29)^2 + (47\cos 40^\circ)} = 36\,\text{km/s}$$

$$Q = \Delta K = \frac{1}{2}m_A v_{AT}^2 = 8.81 \cdot 10^{17}\,\text{J}$$



Ejemplo 1.7. *Rebote de dos bolas en caída libre*.

Dos bolas, una grande de masa $M = 2\,\mathrm{kg}$ y otra pequeña de masa $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ se sueltan desde el reposo desde una altura $h = 1\,\mathrm{m}$, la pequeña encima de la grande. Posteriormente, ambas bolas chocan elásticamente contra el piso, y al rebotar, la grande colisiona elásticamente con la pequeña. Calcule la altura a la cual llega la bola pequeña después de rebotar. Sugerencia: las colisiones son instantáneas.

Primero, calculemos la rapidez a la que ambas bolas llegan al suelo. Para ello, utilicemos conservación de la energía mecánica en el sistema bola pequeña:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \implies v_1 = \sqrt{\frac{2g}{h}} = 4.43\,\mathrm{m/s}$$

Sabemos que la bola grande debe llegar al suelo con la misma rapidez, puesto que esta no depende de la masa. Ahora, la bola grande colisiona contra el suelo.

¡Esa colisión no es tan simple como parece! Consideremos como sistema ambas bolas. Las dos bolas sufren una fuerza externa, la gravedad. *¡En este sistema el moméntum total no se conserva!* Entonces, ¿cómo hacemos? Sabemos que el moméntum total del sistema cambia, en un Δt pequeño,

$$\frac{\Delta \vec{\mathbf{P}}_{total}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{F}}_{total,\ ext}$$

pero esto implica que

$$\Delta \vec{\mathbf{P}}_{total} = \vec{\mathbf{F}}_{total,\ ext}\Delta t$$

pero *si y solo si* la colisión es instantánea, $\Delta t \to 0$, por lo que

$$\Delta \vec{\mathbf{P}}_{total} = \vec{\mathbf{0}}$$

Entonces, si la colisión es instantánea, tenemos permiso de aplicar conservación del moméntum. Las colisiones reales no son instantáneas, aunque el tiempo en el que transcurren sí es muy pequeño en casos cotidianos.

La conservación del moméntum de la bola contra el piso sencillamente voltea la dirección de la velocidad.

Entonces, ahora la bola grande colisiona contra la bola pequeña. Otra vez, dado que la colisión es instantánea, podemos aplicar conservación del moméntum. Vamos a elegir positivo hacia arriba:

$$-mv_1 + Mv_1 = mv_2 + MV_2$$

donde V_2 es la velocidad final de la bola grande y v_2 es la velocidad final de la bola pequeña. Además, se conserva la energía cinética puesto que la colisión es elástica e instantánea:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

Ahora sustituimos los valores numéricos, y el sistema de ecuaciones que hay que resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} -0.2(4.43) + 2(4.43) = 0.2v_2 + 2V_2 \\ (0.2)(4.43)^2 + 2(4.43)^2 = (0.2)v_2^2 + 2V_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.2v_2 + 2V_2 - 7.97 = 0 \\ (0.2)v_2^2 + 2V_2^2 - 43.17 = 0 \end{cases}$$

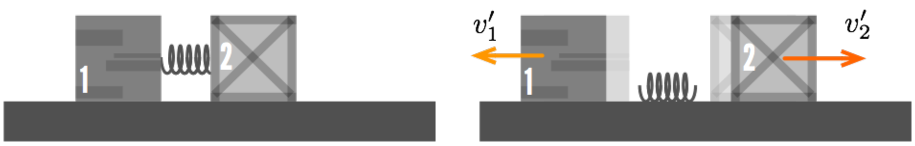
Sabemos que $v_2 > 0$, pues la bola pequeña rebota hacia arriba. Con esto en mente, la solución al sistema es

$$\begin{cases} v_2 = 11.68 \\ V_2 = 2.81 \end{cases}$$

Ahora, usamos esta velocidad v_2 para aplicar conservación de la energía mecánica y ver hasta dónde llega la bola pequeña:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh \implies h = \frac{v_2^2}{2g} = 6.96\,\mathrm{m}$$

La bola pequeña sale volando a una altura mucho mayor que la original; casi siete veces más alto. Es posible lanzar objetos o incluso elevar agua utilizando este principio.



Ejemplo 1.8. *Colisión explosiva.*

En la figura se muestran dos cajas de igual masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ y un resorte de constante $k = 50\,\mathrm{N/m}$, comprimido una distancia $d = 0.2\,\mathrm{m}$. Calcule la velocidad de ambas bolas al soltarse el resorte.

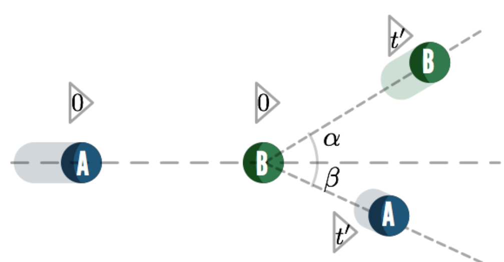
Solución: En esta colisión, la energía *cinética* por sí sola no se conserva, pero sí la energía *mecánica total*, puesto que actúa solo la fuerza elástica. Primero, apliquemos conservación del moméntum:

$$0 = mv_{1fx} + mv_{2fx} \implies v_{1fx} = -v_{2fx} = v$$

es decir, ambas bolas tienen la misma rapidez pero salen disparadas en direcciones contrarias. Ahora aplicamos conservación de la energía *mecánica*:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} = 1.4\,\mathrm{m/s}$$

con lo que $v_{1fx} = +1.4\,\mathrm{m/s}$ y $v_{2fx} = -1.4\,\mathrm{m/s}$.



Ejemplo 1.9. *Colisión en 2D.*

Las colisiones en 2 y 3 dimensiones se tratan de la misma forma que las de una dimensión, solo que ahora habrá más ecuaciones y más incógnitas. Por ejemplo, tenemos en la figura una colisión inelástica en 2D, en la que el objeto B de masa m_B está en reposo inicialmente, y el objeto A de masa m_A se dirige hacia B con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_A = v_A\,\hat{\mathbf{x}}$, poniendo los ejes de la forma usual (arriba, $y > 0$; derecha $x > 0$). En el tiempo t', el objeto B se mueve con una rapidez v'_B, haciendo un ángulo α con el eje x. Por ejemplo, estas podrían ser moléculas o átomos, y este ángulo y rapidez puede medirse con detectores. Queremos calcular el ángulo β y la rapidez final de A.

El moméntum en x se conserva:

$$m_A v_A = m_B v'_B \cos\alpha + m_A v'_{Ax}$$

$$\implies v'_{Ax} = \frac{m_A v_A - m_B v'_B \cos\alpha}{m_A}$$

(utilizar directamente las variables v_B y β complica el problema, es mejor trabajar primero con las componentes). En y, el moméntum se conserva:

$$0 = m_B v'_B \sin\alpha + m_A v'_{Ay}$$

$$\implies v'_{Ay} = -\frac{m_B v'_B \sin\alpha}{m_A}$$

con esto, podemos encontrar v'_A como $v'_A = \sqrt{{v'_{Ax}}^2 + {v'_{Ay}}^2}$ y el ángulo β como $\tan\beta = v'_{Ay}/v'_{Ax}$.

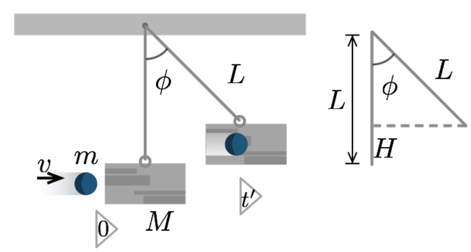
Ahora, nada más como práctica, recordemos que si el choque hubiera sido además elástico, tendríamos una tercera ecuación, la de la conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_A {v'_{Ax}}^2 + \frac{1}{2}m_A {v'_{Ay}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v'_B}^2$$

por lo que tendríamos 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Por ejemplo, no hubiera sido necesario saber la rapidez final v'_B.

Ejercicio. Para el caso inelástico, encuentre β y v'_A si $m_B = 5m_A$, $v_A = 5\,\mathrm{m/s}$, $v'_B = 2\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 30°$.

Ejemplo 1.10. *Péndulo balístico.*



El péndulo balístico es una forma de medir velocidades sin fotoceldas. Se dispara una bala de masa m contra una masa M colgante de un péndulo de largo L. Ocurre una colisión totalmente inelástica. Medimos el ángulo ϕ que hace el péndulo al detenerse, y con esto, queremos calcular la velocidad inicial v de la bala.

Empezamos con conservación del moméntum en el choque inelástico:

$$mv = (m+M)v' \implies v = \frac{m+M}{m}v'$$

ahora, sabemos que no podemos aplicar conservación de la energía en el choque porque es inelástico, pero sí podemos aplicarla después del choque, en el péndulo. Entonces, después del choque, para el sistema péndulo+bala:

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M)gH \implies v' = \sqrt{2gH}$$

Nosotros no conocemos H, pero sí medimos el ángulo y sabemos que el péndulo tiene largo L. Entonces, utilizando trigonometría (ver figura)

$$H = L - L\cos\phi = L(1-\cos\phi) \implies v' = \sqrt{2gL(1-\cos\phi)}$$

con lo que la velocidad de la bala queda

$$v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gL(1-\cos\phi)}$$

1.6 Impulso

Vamos a definir el impulso como

$$\vec{\mathbf{I}} = \int_0^{\Delta t} \vec{\mathbf{F}}dt$$

Es la integral de la fuerza por el tiempo en el que dure una colisión, Δt. Para interpretar esta definición, sustituimos $\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$

$$\vec{\mathbf{I}} = \int_0^{\Delta t} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}dt = \int_{t=0}^{t=\Delta t} d\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i$$

El impulso es entonces el cambio de moméntum que se recibe en una colisión. La fuerza recibida en una colisión es una función variable y muy complicada. Sin embargo, si nos imaginamos que una colisión es simplemente una fuerza constante aplicada por un tiempo muy muy corto, podemos encontrar la **fuerza promedio** que un objeto experimenta en una colisión:

$$\overline{\vec{\mathbf{F}}} = \frac{\vec{\mathbf{I}}}{\Delta t}$$

Una colisión elástica en una situación como la de la figura, tiene una duración en el orden de milisegundos ($\sim 1-10\,\mathrm{ms}$). El impulso de una bola de $m = 1\,\mathrm{kg}$ que colisiona unidimensionalmente contra la pared de forma totalmente elástica a $10\,\mathrm{m/s}$ es

$$I = p' - p = -mv - mv = -2mv = -2 \cdot 1 \cdot 10 = -20\,\mathrm{kg\ m/s}$$

Ahora bien, la magnitud de la fuerza promedio sobre la bola es, suponiendo una duración de $2\,\mathrm{ms}$,

$$\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{20}{2\cdot 10^{-3}} = 10\cdot 10^3 = 10\,000\,\mathrm{N}$$

Lo cual es una fuerza tremenda, aunque dure un tiempo muy pequeño. Dependiendo del límite elástico de cada material, la bola puede incluso llegar a romperse.

Una colisión inelástica puede durar más tiempo. Para ver por qué, considere que la bola fuera atrapada por un resorte que solo se pudiera comprimir, sin estirarse. Claramente, el resorte se comprime en un cierto tiempo, es decir, lo *amortigua*. En el caso de una colisión completamente inelástica, tanto la bola como la pared quedarían en reposo. Por eso, el impulso sería la mitad:

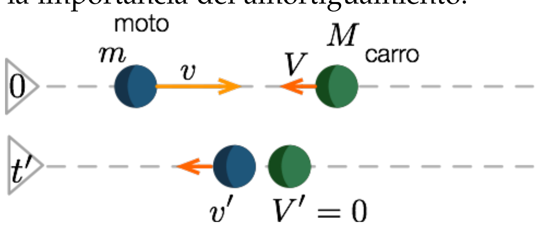
$$I = p' - p = 0 - mv = -mv$$

y por lo tanto, la fuerza se reduciría a la mitad si ambas colisiones duran lo mismo, pero como al amortiguarse el golpe el tiempo de colisión es mayor, la fuerza se reduce aún más. Supongamos que para la misma bola anterior, la colisión durara el doble: entonces

$$I = -mv = -1 \cdot 10 = -10\,\mathrm{kg\ m/s}$$

$$\implies \overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{10}{4 \cdot 10^{-3}} = 2.5 \cdot 10^3 = 2500\,\mathrm{N}$$

o sea, 1/4 de la fuerza que se sufrió sin ningún amortiguamiento. Esa es la importancia del amortiguamiento.



Ejemplo 1.11. *Motociclista contra carro.*

Un carro de 2500 kg se mueve en una presa a 5 km/h. Un motociclista imprudente (que con su moto pesan 200 kg) viaja a contravía a 100 km/h y colisiona de frente contra el carro. Suponga que el carro quedó detenido después de la colisión. Intuitivamente sabemos que la moto se llevará la peor parte. Demuéstrelo.

Primero, unidades y definiciones: $M = 2500\,\mathrm{kg}$, $m = 200\,\mathrm{kg}$, $V = 5\,\mathrm{km/h} = 1.4\,\mathrm{m/s}$, $v = 100\,\mathrm{km/s} = 27.8\,\mathrm{m/s}$, (las variables en mayúscula son las del carro y las minúsculas las de la moto; las variables que tienen prima son las finales)

En nuestra sencilla descripción, no hay fuerzas externas, por lo que el moméntum se conserva:

$$MV - mv = mv' \implies v' = \frac{MV - mv}{m} = 2.2\,\mathrm{m/s} = 7.92\,\mathrm{km/h}$$

Es decir, como esperábamos, la moto sale volando. El problema es que esto no parece resolver nuestra interrogante, porque la fuerza en ambos es la misma. ¿Por qué? Porque el moméntum se conserva, por lo que $\Delta p = \Delta P$. Entonces, eso debería significar que ambos, carro y moto tuvieron iguales daños. No exactamente. La aceleración es fuerza por unidad de masa, por lo que para masas iguales (de los conductores de ambos vehículos), la fuerza es diferente. Supongamos que la colisión duró 0.1 segundos. La aceleración (media) que sufre todo el carro es

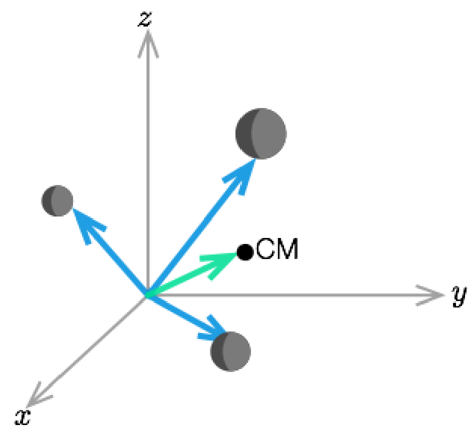
$$A = \frac{V' - V}{\Delta t} = -14\,\mathrm{m/s^2}$$

La aceleración (media) que sufre toda la moto es

$$a = \frac{v' - v}{\Delta t} = 300\,\mathrm{m/s^2}$$

Si ambos conductores pesaran 70 kg, vemos que la magnitud de la fuerza del conductor del carro es 980 N, mientras que la magnitud de la fuerza del conductor de la moto es 21 000 N. El conductor de la moto se lleva siempre la peor parte. Podemos interpretar que el carro tiene más masa para absorber el moméntum, por lo que el daño es menor para el carro.

2 Sistemas de partículas



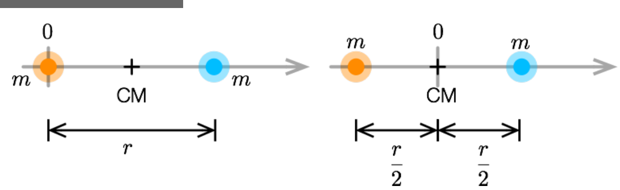
2.1 Centro de masa de partículas puntuales

Cuando tenemos varias partículas, podemos encontrar una posición que las represente a todas como un conjunto. Un cuerpo sólido también podemos pensarlo como una gran cantidad de partículas que forma un sistema. El **centro de masa** es esa posición que representa a todo el cuerpo o sistema. Nuestra definición del centro de masa es

$$M_{\text{total}}\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

donde $M_{\text{total}} = \sum_i m_i$. Si despejamos $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$ podemos interpretarla como un "promedio" de las posiciones de las partículas "pesadas" con su masa.

Ejemplo 2.1. *Estrellas binarias.*



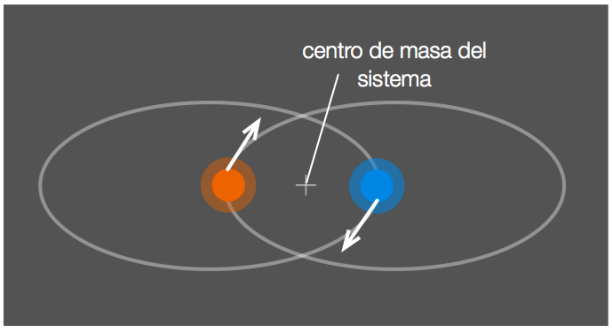
Tenemos dos estrellas de igual masa, m, separadas por una distancia r. La intuición nos dice que el centro de masa debe estar en $r/2$. Verifiquémoslo. Poniendo el sistema de coordenadas como en la figura de la izquierda,

$$2mx_{CM} = m \cdot 0 + mr \implies x_{CM} = r/2$$

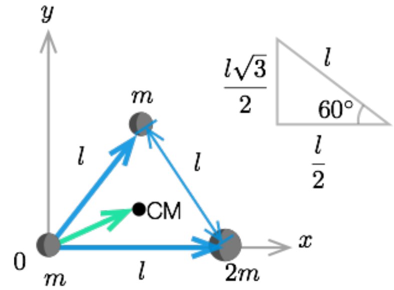
Ahora, si movemos el sistema de coordenadas al de la figura de la derecha,

$$2mx_{CM} = -m\frac{r}{2} + m\frac{r}{2} \implies x_{CM} = 0$$

Las respuestas no son iguales porque la posición depende del origen, pero ambas coinciden en que el centro de masa está en la mitad del camino entre ambas estrellas.



En sistemas como los anteriores, las estrellas se orbitan alrededor de su centro de masa.



Ejemplo 2.2. *Triángulo de masas puntuales.*

Tenemos un triángulo compuesto por masas puntuales como en la figura. Encontremos el centro de masa.

$$4m\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

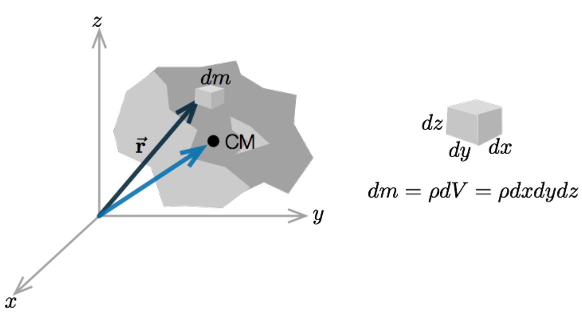
en x:

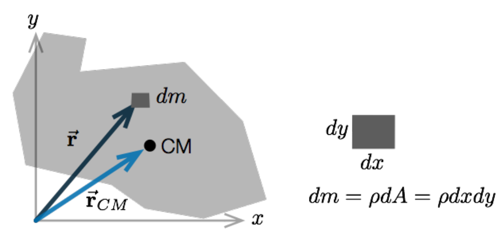
$$4mx_{CM} = (0 + 2ml + \frac{1}{2}ml) \implies x_{CM} = \frac{5}{8}l$$

en y:

$$4my_{CM} = ml\frac{\sqrt{3}}{2} \implies y_{CM} = \frac{\sqrt{3}}{8}l \approx 0.22l$$

2.2 Centro de masa de objetos extendidos





El centro de masa de objetos extendidos se encuentra convirtiendo la suma en una integral:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}dm$$

es decir, separándolo en componentes,

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int ydm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int zdm$$

No podemos integrar x y y respecto a m. Por eso, nos vemos obligados siempre a hacer un cambio de variables para integrar. Usamos la *densidad*, la cual definimos para objetos que solo tienen 1 dimensión como una *densidad lineal de masa*

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L}$$

donde M es la masa total del cuerpo lineal, L es su longitud y dl es un pedazo infinitesimalmente pequeño de su longitud.

Ahora, también podemos definir una *densidad superficial de masa*:

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A}$$

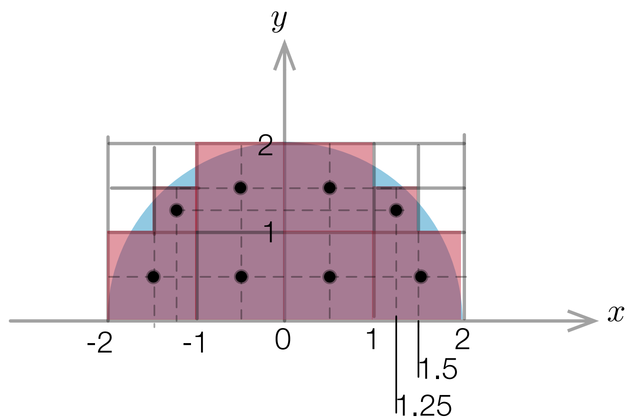
donde A es el área total del cuerpo y dA es un pedazo infinitesimalmente pequeño de su área. Por ejemplo, para un cuerpo en coordenadas cartesianas, el diferencial de área es $dA = dx\,dy$.

Por último, cuando el cuerpo es tridimensional, también podemos definir la *densidad*,

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

donde V es el volumen total del cuerpo y dV es el pedazo infinitesimalmente pequeño de su volumen. Por ejemplo, para un cuerpo en coordenadas cartesianas, $dV = dx\,dy\,dz$.

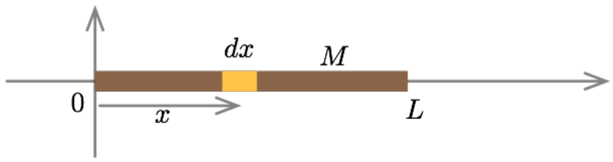
Las integrales para encontrar el centro de masa de cuerpos bidimensionales y tridimensionales se enseñarán propiamente a realizarlas en Cálculo III. Sin embargo, podemos realizarlas también numéricamente de forma aproximada. A continuación podemos encontrar el cálculo para una placa de forma semicircular de radio 2 m, y con densidad superficial uniforme en toda la placa de $1\,\mathrm{kg/m^2}$. La aproximación consiste básicamente en dividir la placa en partículas; cuantas más partículas mejor es la aproximación al resultado real que se obtiene usando cálculo.



Aproximación del centro de masa

x	y	ρ	Δx	Δy	Δm	$x\Delta m$	$y\Delta m$
0,5	0,5	1	1	1	1	0,5	0,5
0,5	1,5	1	1	1	1	0,5	1,5
1,5	0,5	1	1	1	1	1,5	0,5
1,25	1,25	1	0,5	0,5	0,25	0,3125	0,3125
-0,5	0,5	1	1	1	1	-0,5	0,5
-0,5	1,5	1	1	1	1	-0,5	1,5
-1,25	1,25	1	0,5	0,5	0,25	-0,3125	0,3125
-1,5	0,5	1	1	1	1	-1,5	0,5
Sumas					**6,5**	**0**	**5,625**
Posición del centro de masa (suma entre masa total)						**0**	**0,865**

Lo que hacemos para aproximar numéricamente el centro de masa de esta placa semicircular es dividirla en regiones cuadradas. Las celdas en celeste claro son las que hay que calcular, y las celdas blancas son las que uno debe rellenar con cada problema específico. Como vemos, no todas las regiones tienen que tener el mismo tamaño. Como la densidad superficial de masa de la placa es uniforme e igual a 1 kg/m^2, para obtener la masa de cada región se multiplica la densidad por el área de cada región. Luego sencillamente seguimos la ecuación del centro de masa para partículas, y con eso obtenemos la aproximación de la posición del centro de masa. Observe que la posición en *x* del centro de masa es cero, eso es porque hay igual cantidad de materia a ambos lados del eje *x*. En el eje *y*, por el contrario, solo hay masa en *y>0*, por lo que el centro de masa tiene una posición en *y* entre 0 y 1.



Ejemplo 2.3. *Centro de masa de una barra.*

Para una barra de longitud L y masa M como la de la figura, podemos encontrar el centro de masa si consideramos una porción infinitesimalmente pequeña de su longitud, dx. La posición de esta pequeña porción es x, y la barra va de $0 < x < L$.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x dm$$

Entonces, como anticipamos, no podemos integrar x respecto a dm, por lo que

$$dm = \lambda dx$$

Vamos a suponer que $\lambda =$ const en toda la barra. También debemos recordar que $\lambda = M/L$. Entonces,

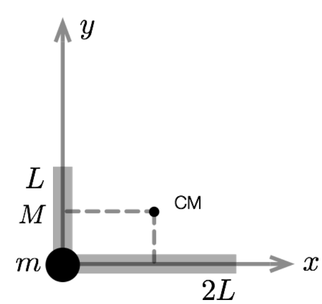
$$x_{CM} = \int_0^L \frac{1}{M} x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{\lambda}{M}\frac{L^2}{2}$$

o bien, sustituyendo la densidad,

$$x_{CM} = \frac{M}{ML}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

Como vemos, las unidades nos dan de longitud, como debe ser para la posición. Además, como esperábamos para esa barra, el centro de masa está en el centro de la barra. Este es un resultado más general: *Si la densidad de masa es uniforme, el centro de masa de un cuerpo extendido está en su centro geométrico.*

El centro de masa es como un "promedio", y no necesariamente en el lugar del centro de masa hay masa. Por ejemplo, el centro de masa de un anillo está en el centro del anillo, lugar donde no hay masa.



Ejemplo 2.4. *Centro de masa de una visagra.*

Para la visagra de la figura, encontremos el centro de masa. Las dos barras están hechas del mismo material.

Como las dos barras son del mismo material, si una tiene masa M, la otra tiene masa $2M$, puesto que su densidad es la misma. Como las barras tienen densidad uniforme, su centro de masa está en el centro geométrico. Entonces,

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{2M + M + m}(M\frac{L}{2}\,\hat{\mathbf{y}} + 2ML\,\hat{\mathbf{x}} + m\vec{\mathbf{0}})$$

2.3 Dinámica del centro de masa

Derivando la ecuación del centro de masa, podemos encontrar (si la masa del sistema no cambia)

$$M_{\text{total}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_i}{\mathrm{d}t}$$

con lo que encontramos la **velocidad del centro de masa**:

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{1}{M_{\text{total}}}\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

y por lo tanto, la aceleración es

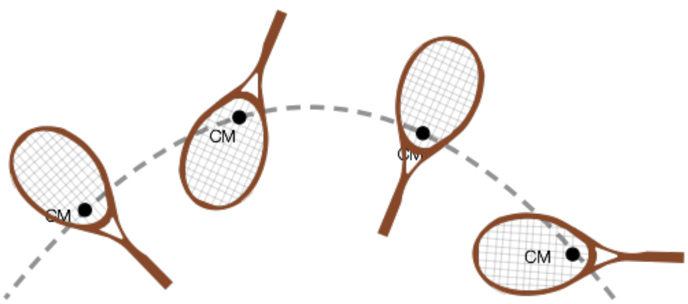
$$\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \frac{1}{M_{\text{total}}}\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

y podemos plantear la **segunda ley de Newton** como

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{externas}} = M_{\text{total}}\vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

(más adelante explicaremos por qué solo importa la fuerza externa)

Ejemplo 2.5. *Raqueta como proyectil.*



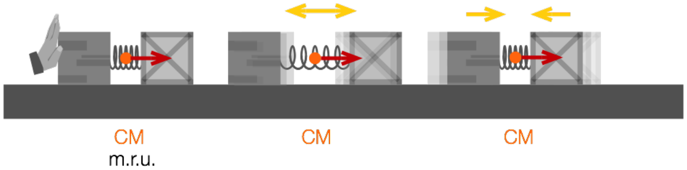
Un tenista lanza molesto su raqueta de masa total M en un tiro parabólico con velocidad inicial v_0 en un ángulo α con la horizontal. La posición original de la raqueta es el vector nulo. Describamos el movimiento del centro de masa de la raqueta.

Como vemos, sin importar el complejo movimiento que tiene la raqueta en el espacio por su lanzamiento, el centro de masa se comporta como una partícula puntual. Por lo tanto, podemos describir el movimiento del centro de masa de la raqueta como (eligiendo y positivo hacia arriba)

$$\vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{CM} \implies -Mg\,\hat{\mathbf{y}} = Ma_{CM}\,\hat{\mathbf{y}}$$

eso implica que el movimiento del centro de masa es:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = v_0\cos\alpha\, t\,\hat{\mathbf{x}} + (v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2)\,\hat{\mathbf{y}}$$



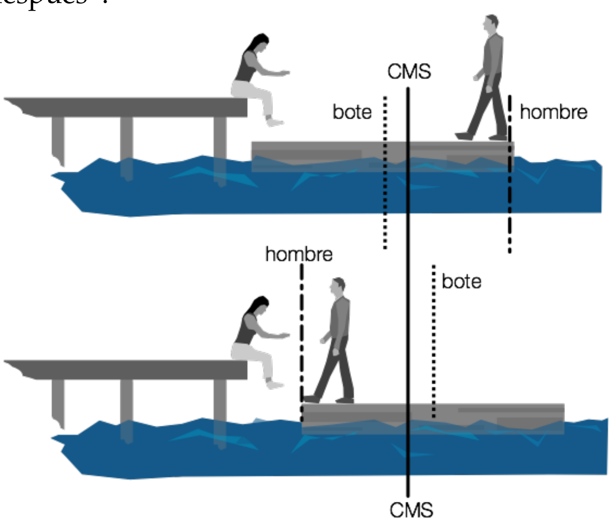
Intuición física: si tenemos dos cajas unidas por un resorte y empujamos una de ellas, le estamos impartiendo al sistema una velocidad constante hacia la derecha. La velocidad del centro de masa debe ser constante, aunque las cajas tengan un movimiento complicado de estiramiento y compresión debido al resorte a medida que se desplazan.

2.4 Conservación del centro de masa

Si el centro de masa inicialmente estaba en reposo, no importa cómo se muevan las partículas, el centro de masa no se moverá. Es decir,

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathbf{r}}_{CM} = \vec{\mathbf{r}}'_{CM}$$
$$\implies \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}'_i$$

donde las variables sin prima significan "antes" y las que tienen prima, "después".



Ejemplo 2.6. *Bote.*

Un hombre (h) de 70 kg se encuentra en el extremo alejado una balsa (b) que flota sobre un lago tranquilo. La balsa tiene longitud $L = 6\,\text{m}$ y masa 150 kg y el hombre quiere invitar a su amiga, quien está sentada en el muelle, a subir. El hombre camina hacia donde está su amiga, quien extiende los brazos una longitud de 0.5 m. ¿Logrará ayudarla a subir?

De la conservación del centro de masa (pues la balsa siempre ha estado en reposo):

$$m_h x_h + m_b x_b = m_h x'_h + m_b x'_b$$

Si colocamos el origen en el muelle, que coincide con el lado izquierdo de la balsa, la posición inicial del hombre es $x_h = +6\,\text{m}$, puesto que está al lado derecho de la balsa. El centro de masa de la balsa está en su centro geométrico, $x_b = +3\,\mathrm{m}$. El centro de masa del sistema (CMS) al inicio es, entonces,

$$x_{CMS} = \frac{m_h x_h + m_b x_b}{m_b + m_h} = \frac{70 \cdot 6 + 150 \cdot 3}{70 + 150} = +3.95\,\mathrm{m}$$

Como el hombre se mueve hacia la izquierda, la balsa también se tiene que mover para que el centro de masa quede en el mismo lugar. La balsa se desplaza de su posición original hasta x'_b. La pregunta complicada es cuál es la posición final del hombre. El hombre camina 6 m respecto al marco de referencia de la balsa. En ese marco de referencia, la posición inicial del hombre es $x_{h(b)} = +L/2$. En ese mismo marco de referencia, la posición final del hombre es $x'_{h(b)} = -L/2$. Entonces, transformando el marco de referencia, la posición final del hombre respecto al muelle es

$$x'_h = -\frac{L}{2} + x'_b$$

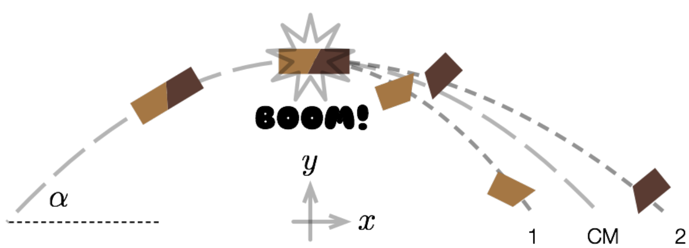
con lo que la ecuación queda

$$m_h x_h + m_b x_b = m_h \left(-\frac{L}{2} + x'_b\right) + m_b x'_b$$

sustituyendo valores numéricos,

$$870 = 70(x'_b - 3) + 150 x'_b \implies x'_b = +4.90\,\mathrm{m}$$

entonces el hombre al final queda en la posición $x'_h = 2.59 - 6 = +1.90\,\mathrm{m}$ como su amiga solo puede estirar los brazos hasta 0.5 m, lamentablemente el hombre no puede ayudarla a subir.



Ejemplo 2.7. *Proyectil que explota.*

Un proyectil militar se lanza con una rapidez $v_0 = 200\,\mathrm{m/s}$ en un ángulo $\alpha = 45°$ con la horizontal. A medio camino, cuando alcanza su altura máxima, el proyectil explota en dos partes de igual masa, impartiéndole una velocidad 30 % mayor a la parte 2. Calcule el alcance de ambas partes del proyectil, y la posición del centro de masa de ambas partes al caer.

Al dispararse, la velocidad inicial es, poniendo los ejes coordenados y el origen como está en la figura,

$$\vec{\mathbf{v}} = v_0 \cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + v_0 \sin\alpha\,\hat{\mathbf{y}} = 141.42\,\hat{\mathbf{x}} + 141.42\,\hat{\mathbf{y}}$$

Para poder calcular el alcance de cada pedazo también debemos saber la posición inicial del lanzamiento y la altura máxima. En el eje y se trata de caída libre, y en el eje x, de m.r.u. El tiempo desde que se lanzó hasta que alcanzó la altura máxima lo encontramos como

$$0 = v_{0y} - gt \implies t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 14.43\,\mathrm{s}$$

La altura máxima la encontramos como

$$y_{max} = h = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 1020.38\,\mathrm{m}$$

Ahora, la posición inicial es

$$0 = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t \implies x_0 = -2040.69\,\mathrm{m}$$

Podemos aprovechar para encontrar la posición del centro de masa al final de la caída. Hay que recordar que el centro de masa del sistema permanece en el mismo punto, como si la explosión no hubiera ocurrido, esto lo sabemos fundamentado en que

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_{ext,i} = m\vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

ya que las fuerzas internas no contribuyen a la aceleración del centro de masa, solo lo hace la gravedad, una fuerza externa, por lo que el centro de masa se mueve de forma parabólica. Entonces, el centro de masa tiene un alcance que es el doble de su distancia a la posición de lanzamiento, puesto que la parábola es simétrica. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM,\,\mathrm{final}} = +2040.69\,\mathrm{m}\ \hat{\mathbf{x}}$$

Ahora bien, buscamos la posición final de cada uno de los pedazos del proyectil. Sabemos que la explosión hizo que el pedazo 2 aumentara en un 30 % su velocidad. Como explota en la parte más alta del vuelo, la velocidad en y es cero, y entonces, la velocidad de la parte 2 en ese punto es

$$v_2' = (1 + 0.3) v_0 \cos\alpha = 183.85\,\mathrm{m/s}$$

Para encontrar la velocidad de la parte 1, debemos usar conservación del moméntum, pero como hay una fuerza externa, nos vemos obligados a suponer que la explosión ha sido instantánea, como ya lo discutimos antes. Debemos recordar también que el proyectil se divide en dos partes de igual masa m.

$$2mv_0 \cos\alpha = mv_1' + mv_2' \implies v_1' = 2v_0 \cos\alpha - v_2' = 98.99\,\mathrm{m/s}$$

Entonces, calculemos el tiempo que les toma bajar a ambos pedazos. Como la velocidad solo se modifica en x, no en y, el tiempo de caída es el mismo, $t = 14.43\,\mathrm{s}$. Entonces, la posición final de cada pedazo será: para el pedazo 1,

$$x_{1,f} = v_1' t_f = 1428.43\,\mathrm{m}$$

y para el pedazo 2,

$$x_{2,f} = v_2' t_f = 2652.96\,\mathrm{m}$$

Ahora, vamos a calcular el centro de masa con estos datos para asegurarnos de que da la misma posición que si no hubiera explotado el proyectil.

$$x_{CM,f} = \frac{mx_{1,f} + mx_{2,f}}{2m} = \frac{x_{1,f} + x_{2,f}}{2} = 2040.70$$

lo cual es, descontando el redondeo de decimales, la misma posición que habíamos encontrado antes.