TEC | Tecnológico de Costa Rica

GANDRĒOLIVA

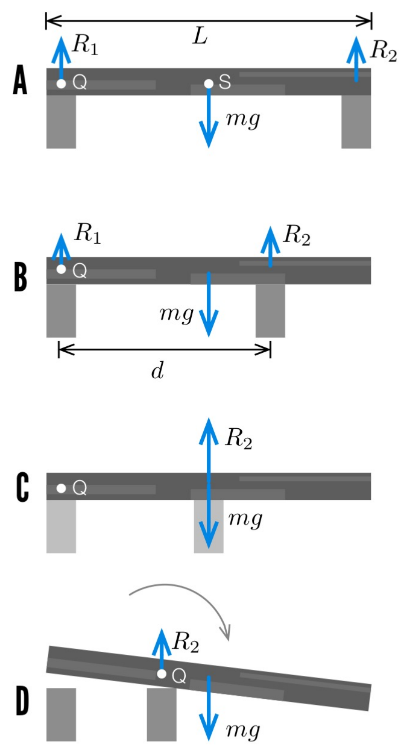
FÍSICA GENERAL I
EQUILIBRIO

André Oliva, BSc
Instituto Tecnológico de Costa Rica

1 Equilibrio

1.1 Condición estática

Como ya vimos, para aplicar la segunda ley de Newton rotacional se necesitaba elegir el punto Q fijo, coincidente con el eje de rotación. Ahora, si no hay fuerzas sobre un cuerpo, no hay torque alrededor de ningún punto, tal y como lo vimos cuando estudiamos conservación del moméntum angular. Entonces, si no hay torques netos, se puede hacer la suma de torques igual al vector cero eligiendo *cualquier* punto.



En un cuerpo en equilibrio, el centro de masa se mueve con velocidad constante, y el objeto rota con ω constante. Para ello, *la suma de los torques alrededor de cualquier punto debe ser cero, y la suma de las fuerzas alrededor de cualquier punto debe ser cero.*

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{0}}; \quad \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \vec{\mathbf{0}}$$

Respecto a la suma de fuerzas, para realizarla debemos considerar todo el cuerpo sólido rígido como una sola partícula.

Ejemplo 1.1. *Banco.*

Decidimos hacer un banco apoyando una tabla sobre dos soportes, como está en la figura. Queremos ver en qué posición de los soportes la tabla va a caerse. En A, vamos a hacer suma de fuerzas y torques. Consideramos toda la tabla como una partícula:

$$\sum F_y = 0 \implies R_1 + R_2 - mg = 0$$

ahora, vamos a hacer suma de torques sobre el punto Q y despejar las fuerzas de reacción.

$$\sum \tau_{zQ} = 0$$

$$-\frac{L}{2}mg + LR_2 = 0$$

$$R_2 = mg/2; \quad R_1 + mg/2 - mg = 0 \implies R_1 = R_2 = mg/2$$

Como era de esperarse, la reacción se distribuye equitativamente. Ahora repetiremos el procedimiento haciendo la suma de torques en S, para verificar que da lo mismo:

$$\sum F_y = 0 \implies R_1 + R_2 - mg = 0$$

ahora, vamos a hacer suma de torques sobre el punto S y despejar las fuerzas de reacción.

$$\sum \tau_{zS} = 0$$

$$-R_1 L/2 + R_2 L/2 = 0 \implies R_1 = R_2$$

con lo que $2R_1 = mg \implies R_1 = R_2 = mg/2$.

en B, vamos a colocar el soporte a una distancia d como está en la figura, de forma que $L/2 < d < L$. La suma de fuerzas queda igual:

$$\sum F_y = 0 \implies R_1 + R_2 - mg = 0$$

ahora, hacemos la suma de torques alrededor de Q:

$$\sum \tau_{zQ} = -mgL/2 + R_2 d = 0$$

$$R_2 = \frac{mgL}{2d}$$

$$\implies R_1 = mg - mg\frac{L}{2d}$$

por ejemplo, si $d = 3L/4$, $R_2 = 2mg/3 > mg/2$ y $R_1 = mg/3 < mg/2$, por lo que el valor de R_2 aumenta y R_1 disminuye. El caso C es el límite, cuando $d = L/2$, la reacción R_1 debe ser cero y la tabla está a punto de caerse. En este caso, $\sum F_y = 0$:

$$R_2 = mg$$

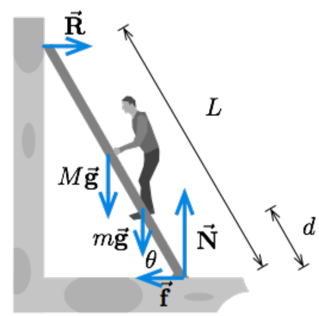
y $\sum \tau_{zQ} = 0$:

$$-mgL/2 + R_2 L/2 = 0 \implies R_2 = mg$$

En la situación D, el equilibrio es imposible. Si hacemos suma de torques en Q,

$$\sum \tau_{zQ} = mg\left(\frac{L}{2} - d\right) > 0$$

Ejemplo 1.2. *Escalera.*



Queremos encontrar $\vec{\mathbf{R}}$, $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{f}}$ para que la escalera se mantenga en equilibrio.

Hacemos $\sum F_x = 0$:

$$R - f = 0 \implies f = R$$

Hacemos $\sum F_y = 0$:

$$N - Mg - mg = 0$$

$$\implies N = Mg + mg$$

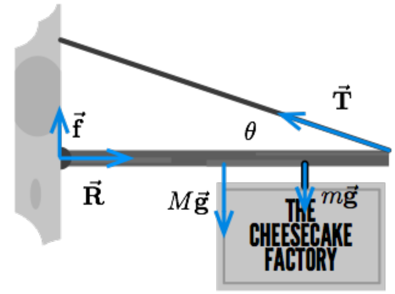
Elegimos el punto Q en la base de la escalera. $\sum \tau_{zQ} = 0$

$$mgd|\sin(90^\circ + \theta)| + Mg\frac{L}{2}|\sin(90^\circ + \theta) - RL|\sin(180^\circ - \theta)| = 0$$

$$mgd\cos\theta + Mg\frac{L}{2}\cos\theta - R\sin\theta = 0$$

$$R = \frac{Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgd\cos\theta}{\sin\theta}$$

Ejemplo 1.3. *Rótulo.*



El rótulo cuelga a una distancia $d = 3L/4$ medida desde la pared. Queremos saber T, f y R. $\sum F_x = 0$

$$R - T\cos\theta = 0$$

$\sum F_y = 0$

$$f + T\sin\theta - Mg - mg = 0$$

Elegimos Q como el apoyo que está en la parte izquierda de la barra. $\sum \tau_{zQ} = 0$

$$-MgL/2 - 3mgL/4 + TL\sin\theta = 0$$

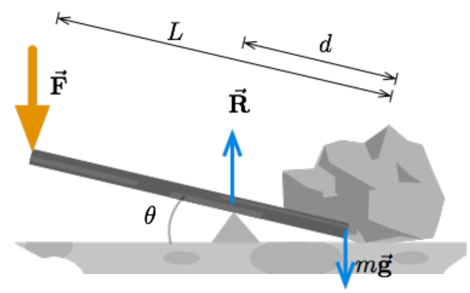
$$\implies T\sin\theta = Mg/2 - 3mg/4$$

$$f = Mg + mg - Mg/2 - 3mg/4 = Mg/2 + mg/4$$

$$R = \left(\frac{Mg}{2} - \frac{3mg}{4}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$R = \left(\frac{Mg}{2} - \frac{3mg}{4}\right)\cot\theta$$

Ejemplo 1.4. *Palancas.*



Para la palanca de la figura, calcule la fuerza mínima para levantar la carga de masa m que se muestra en la figura.

No nos interesa R, por lo que usamos Q como el punto de apoyo de la palanca. Para que podamos levantar la piedra con ω constante, $\sum \tau_{z,Q} = 0$:

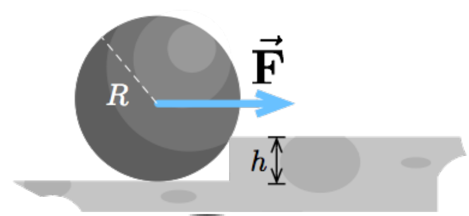
$$-mgd|\sin(90^\circ - \theta)| + LF|\sin(90^\circ + \theta)| = 0$$

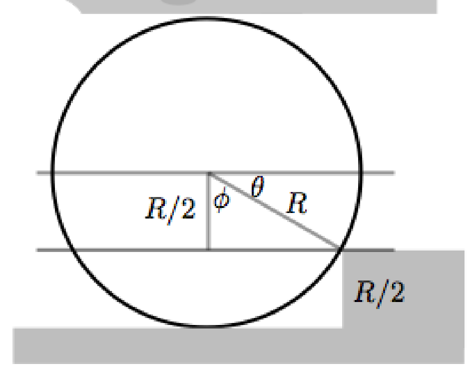
$$-mgd\cos\theta + LF\cos\theta = 0$$

$$F = mgd/L$$

entre más largo L y más corto d, se necesita menos fuerza (ventaja mecánica).

Ejemplo 1.5. *Subir una bola por una grada.*





Una bola de masa M y radio R se intenta subir por una grada de altura $h = R/2$ aplicándole una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}$ en su centro. Calcule la magnitud mínima de F.

El torque alrededor del punto de contacto debe ser cero para que la bola suba con rapidez angular constante. Nos valemos del siguiente diagrama para calcular los torques de la gravedad y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. Sabemos que $\phi + \theta = 90^\circ$

El torque de la gravedad alrededor de la esquina de la grada es $MgR|\sin(90^\circ + \theta)| = MgR\sin\phi$. Hay que poner $\cos\phi$ en términos de las variables conocidas, por lo que con el triángulo rectángulo del diagrama,

$$\sin\phi = \frac{\text{op}}{hip} = \frac{\sqrt{R^2 - (R/2)^2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

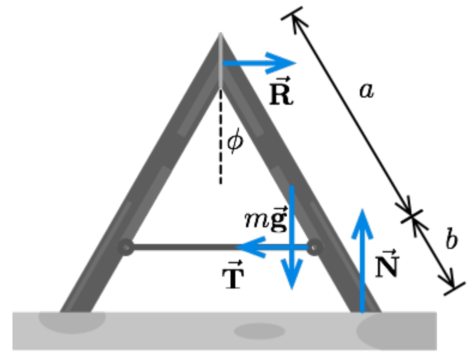
por lo que el torque queda $MgR\sqrt{3}/2$. Ahora, el torque de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es $-FR|\sin(180^\circ - \theta)| = -FR\cos\phi = -FR/2$. Con esto,

$$\sum \tau_z = 0 \implies MgR\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{FR}{2} = 0$$

lo que nos da

$$F = \sqrt{3}Mg$$

Ejemplo 1.6. *Estructura.*



Para la estructura de la figura, compuesta de dos tablas de masa m y largo $a + b$ sin pegamento ni fricción con el piso que forman un ángulo 2ϕ, unidas por una cuerda ubicada a una distancia b medida a lo largo de la tabla hasta el piso, calcule la tensión de esta cuerda.

Suma de fuerzas en x:

$$R - T = 0$$

Suma de fuerzas en y:

$$N = mg$$

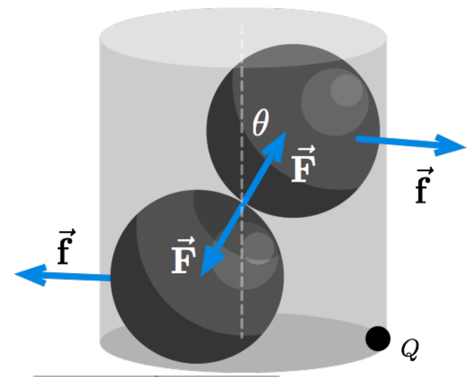
Suma de torques en z, alrededor de la cúspide de la estructura (se elimina la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$):

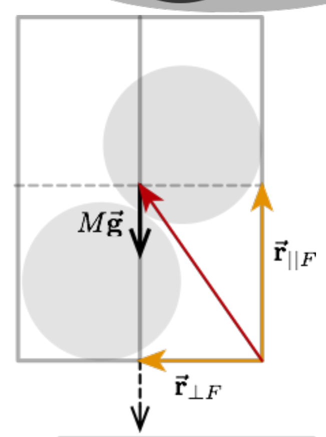
$$-\frac{a+b}{2}mg\sin\phi + (a+b)mg\sin\phi - Ta|\sin(90^\circ + \phi)| = 0$$

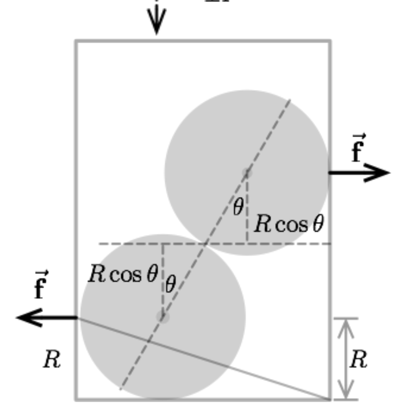
$$\frac{a+b}{2}mg\sin\phi - Ta\cos\phi = 0$$

$$T = \frac{a+b}{2}\frac{mg}{a}\tan\phi$$

Ejemplo 1.7. *Canicas en un vaso.*







Un vaso cilíndrico de masa M y diámetro $3R$ se coloca en una superficie horizontal. Dos canicas, cada una de masa m y radio R, se colocan en el cilindro. Calcule las fuerzas de contacto sobre el cilindro y el valor máximo de m para el cual el vaso no se voltea.

La fuerza normal sobre todo el vaso es

$$\sum F_{\text{y, vaso}} = 0 \implies N = 2mg$$

Hay que hacer un diagrama de fuerzas para cada esfera. Llamamos F a la magnitud de fuerza de contacto entre las esferas, con un ángulo θ medido respecto a la vertical. Por trigonometría (ver tercera figura del ejercicio)

$$2R + 2R\sin\theta = 3R \implies \sin\theta = 1/2 \implies \theta = 30^\circ$$

Ahora, suma de fuerzas en y para la esfera superior:

$$F\cos\theta - mg = 0 \implies F = 1.15mg$$

Ahora, aplicamos suma de fuerzas en x a la misma esfera:

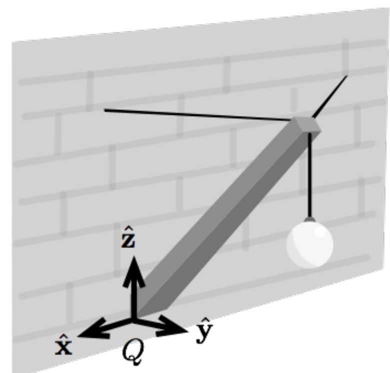
$$F\sin\theta - f = 0 \implies f = 0.58mg$$

Si aumenta m, el vaso tenderá a voltearse alrededor del punto Q, por lo que vamos a hacer suma de torques alrededor de Q.

El brazo de palanca del torque del peso del vaso se muestra en la figura en rojo. Para simplificar los cálculos, separemos el brazo de palanca en dos componentes: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_{||} + \vec{\mathbf{r}}_{\perp}$. Solamente la componente perpendicular a la fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ va a sobrevivir el producto cruz. Entonces, el brazo de palanca que cuenta es $3R/2$.

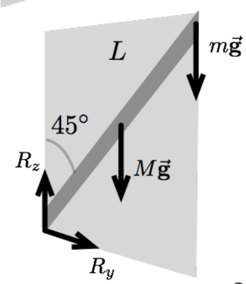
Procedemos igual con los otros torques de las fuerzas f. Las fuerzas F no actúan sobre el vaso, por lo que no se cuentan. El brazo de palanca de la fuerza f de la canica inferior es R, y el de la canica superior es $R + 2R\cos\theta$. La suma de torques es

$$\sum \tau_{z,Q} = 0 \implies Mg\left(\frac{3R}{2}\right) + fR - f(R + 2R\cos\theta) = 0$$



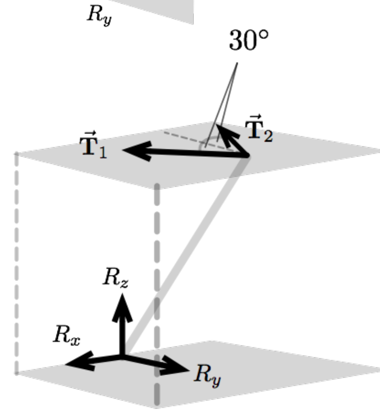
sustituyendo los valores, obtenemos

$$M = 0.67m$$



Ejemplo 1.8. *Lámpara colgante.*

Una lámpara está anclada a una pared por medio de una tabla y dos cuerdas atadas a su extremo superior. Las cuerdas forman un ángulo de 60°, la bisectriz de ambas forma un plano con la tabla, y ese plano es perpendicular al plano que forman ambas cuerdas, que corresponde al plano horizontal. La tabla tiene largo $L = 1\,\mathrm{m}$ y su extremo inferior está apoyado en la pared, formando un ángulo de 45° con esta. El peso de la tabla es 1 kgf, y el de la lámpara, 10 kgf. Calcule la reacción de la pared y las tensiones de las cuerdas.



Descomponemos la reacción de la pared en $\vec{\mathbf{R}} = R_x\,\hat{\mathbf{x}} + R_y\,\hat{\mathbf{y}} + R_z\,\hat{\mathbf{z}}$. Las tensiones de las cuerdas las llamamos $\vec{\mathbf{T}}_1$ y $\vec{\mathbf{T}}_2$.

Las ecuaciones que se deben cumplir para el equilibrio (aplicadas a la tabla) son: $\sum\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$ y $\sum\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}}$, es decir,

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum \tau_x = 0 \\ \sum \tau_y = 0 \\ \sum \tau_z = 0 \end{cases}$$

seis ecuaciones con un máximo de seis incógnitas.

Nos valemos de las demás figuras para calcular fuerzas y torques:

$\sum F_x = 0:$

$$R_x + T_1 \sin 30^\circ - T_2 \sin 30^\circ = 0$$

$\sum F_y = 0:$

$$R_y - T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0$$

$\sum F_z = 0:$

$$Rz - mg - Mg = 0$$

Nos preparamos para calcular los torques:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{L}} &= L \cos 45^\circ \, \hat{\mathbf{y}} + L \sin 45^\circ \, \hat{\mathbf{z}} \\
M\vec{\mathbf{g}} &= -Mg \, \hat{\mathbf{z}} \\
m\vec{\mathbf{g}} &= -mg \, \hat{\mathbf{z}} \\
\vec{\mathbf{T}}_1 &= T_1 \sin 30^\circ \, \hat{\mathbf{x}} - T_1 \cos 30^\circ \, \hat{\mathbf{y}} \\
\vec{\mathbf{T}}_2 &= -T_2 \sin 30^\circ \, \hat{\mathbf{x}} - T_2 \cos 30^\circ \, \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Calculamos los productos cruz con los valores numéricos (no se muestran los pasos intermedios)

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_1 = \frac{\vec{\mathbf{L}}}{2} \times M\vec{\mathbf{g}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_2 = \vec{\mathbf{L}} \times m\vec{\mathbf{g}} = -5\sqrt{2} \, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_3 = \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{T}}_1 = \frac{T_1\sqrt{6}}{4} \, \hat{\mathbf{x}} + \frac{T_1\sqrt{2}}{4} \, \hat{\mathbf{y}} - \frac{T_1\sqrt{2}}{4} \, \hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_4 = \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{T}}_2 = -\frac{T_2\sqrt{6}}{4} \, \hat{\mathbf{x}} - \frac{T_2\sqrt{2}}{4} \, \hat{\mathbf{y}} + \frac{T_2\sqrt{2}}{4} \, \hat{\mathbf{z}}$$

Con lo que: $\sum \tau_x = 0$:

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - 5\sqrt{2} + \frac{T_1\sqrt{6}}{4} + \frac{T_2\sqrt{6}}{4} = 0$$

$$(T_1 + T_2)\sqrt{3} = 21$$

$\sum \tau_y = 0$:

$$\frac{T_1\sqrt{2}}{4} - \frac{T_2\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\implies T_1 = T_2 = T$$

con lo que, de la suma de torques en x, obtenemos $T = 7\sqrt{3}/2\,\text{kgf}$. La suma de torques en z nos da

$$-\frac{T_1\sqrt{2}}{4} + \frac{T_2\sqrt{2}}{4} = 0 \implies T_1 = T_2 = T$$

que es la misma ecuación anterior. Ahora, sustituimos estos resultados en las demás ecuaciones, las sumas de fuerzas. De la suma de fuerzas en x:

$$R_x + T/2 - T/2 = 0 \implies R_x = 0$$

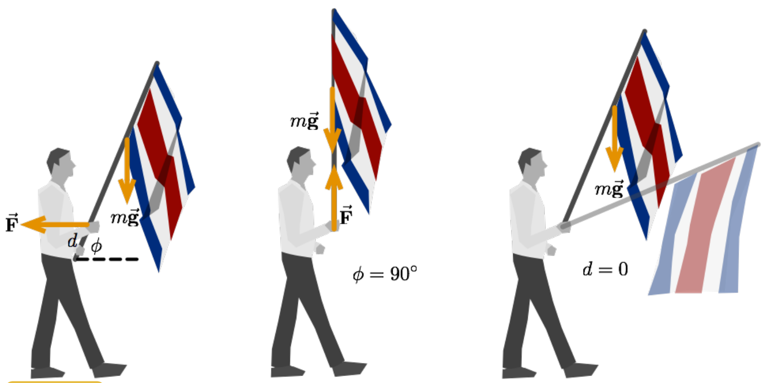
De la suma de fuerzas en y:

$$R_y = 2T\cos 30^\circ \implies R_y = \frac{21}{2}\,\text{kgf}$$

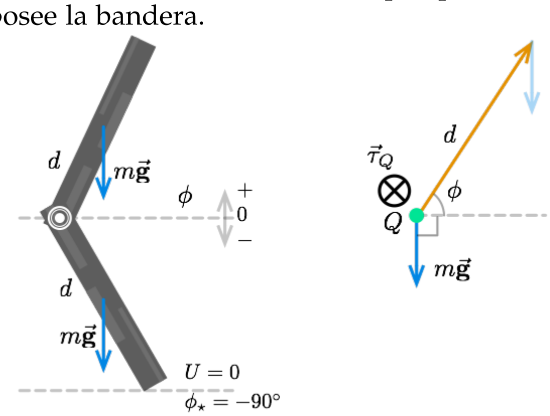
De la suma de fuerzas en z:

$$R_z = mg + Mg = 11\,\text{kgf}$$

1.2 Estabilidad y teoría de potencial



extra Al levantar una bandera, puede percibirse bien el concepto de torque. La bandera se sostiene correctamente al aplicar la fuerza a una distancia d del extremo próximo de la asta. Entre menor sea la distancia d, es más difícil llevar la bandera. Si la distancia d se reduce a cero, la bandera es imposible de sostener y cae. Esta no es la manera más fácil de transportar una bandera, sin embargo. Si se pone totalmente vertical, no hay que hacer torque para llevarla, solamente sostener su peso. En su posición vertical, la bandera está en un *equilibrio inestable*. Vamos a analizar esto desde la perspectiva de la energía potencial que posee la bandera.

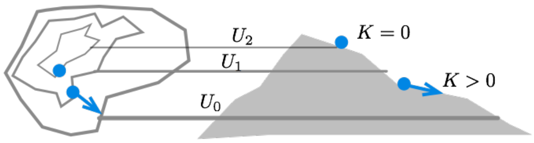


Calculemos la energía potencial de un palo que cuelga verticalmente como en la figura. La energía potencial es el trabajo que uno debe hacer para vencer el torque de la gravedad, definiendo la energía potencial como cero en el punto más bajo del palo.

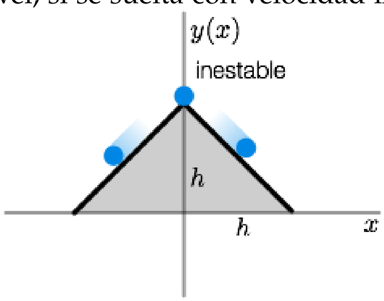
$$U_P = -\int_\star^P \tau_z d\phi = +\int_\star^P mgd\cos\phi d\phi$$

como se ve en la figura, $\phi_\star = -\pi/2$

$$U_P = mgd(\sin\phi - \sin(-\pi/2)) = mgd(1 + \sin\phi)$$

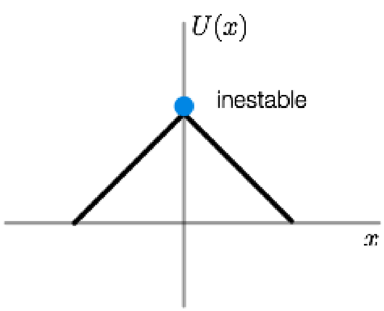


Si soltamos una partícula con velocidad inicial cero por una montaña, empezará a moverse hacia abajo, buscando una energía potencial menor. Si una partícula se suelta en un lugar donde hay energía potencial, esta se mueve siempre de la energía potencial mayor a la energía potencial menor. Podemos hacer curvas como las de la figura para mostrar varios valores de la energía potencial. A estas curvas se les llama *curvas de nivel*. La partícula siempre se mueve perpendicular a las curvas de nivel, si se suelta con velocidad inicial cero.



Aproximemos la montaña de la figura como una función como la aquí presentada. Es una función de criterio dividido:

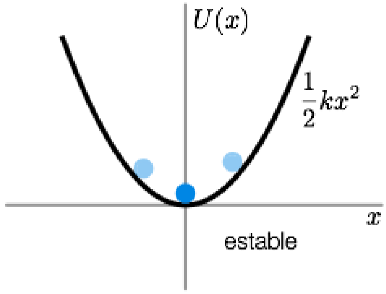
$$y(x) = \begin{cases} x + h & x < 0 \\ -x + h & x > 0 \end{cases}$$



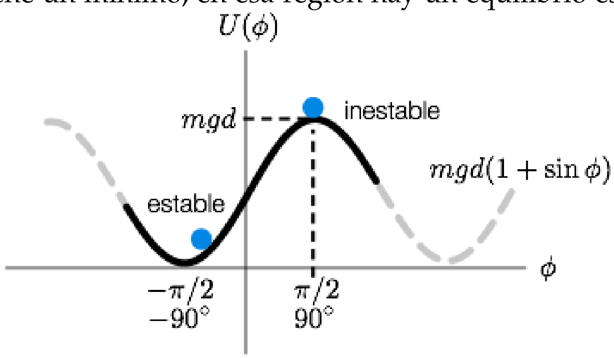
Podemos graficar la energía potencial entonces, como

$$U(x) = mgy(x) = \begin{cases} mg(x + h) & x < 0 \\ mg(-x + h) & x > 0 \end{cases}$$

Cuando la energía potencial forma cualquier máximo (cóncavo hacia abajo), tenemos una situación de *equilibrio inestable*, porque al mover la partícula en cualquier posición cercana al máximo, esta se desplaza y se aleja cada vez más de su lugar de origen.



La energía potencial elástica se comporta de otra forma: aquí más bien hay un mínimo. Cuando movemos un poco la partícula de su posición de equilibrio, la partícula tiende a regresar a su posición original. A esto se le llama *equilibrio estable*. Si la función de energía potencial tiene un mínimo, en esa región hay un equilibrio estable.



Si graficamos la energía potencial que obtuvimos para el palo, vemos que alrededor de $\phi = \pi/2$ hay equilibrio inestable, y alrededor de $\phi = -\pi/2$ hay equilibrio estable.