TEC Tecnológico de Costa Rica

GANDRĒOLIVA

FÍSICA GENERAL I
DINÁMICA

André Oliva, BSc
Instituto Tecnológico de Costa Rica

1 Leyes de Newton

Toda la mecánica clásica newtoniana, que estudiamos en este curso, está sustentada en las tres leyes de Newton, formuladas en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la *filosofía natural* [el antiguo nombre de la física]), publicada en 1687.

a)
b)
c)

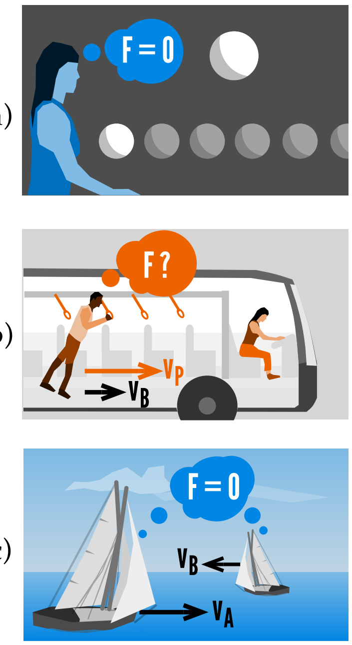


Figura 1.1: Primera ley de Newton y marcos de referencia inerciales

1.1 Primera ley de Newton

La primera ley de Newton dice:

> Un cuerpo sin fuerzas se mueve en línea recta con velocidad constante (en un marco de referencia inercial).

Un objeto que no esté sujeto a la acción de ninguna fuerza, es decir, un cuerpo *libre*, permanece en reposo relativo (velocidad cero respecto a algo) o en movimiento rectilíneo uniforme, indefinidamente (fig. 1.1a). Una bola de fútbol, por ejemplo, permanecería en movimiento rectilíneo uniforme para siempre si no existiera la *fuerza de fricción* contra la cancha que la va deteniendo. Tradicionalmente a esta ley se la conoce como *ley de la inercia*, y no se cumple en todos los marcos de referencia. Los marcos de referencia donde sí se cumple la primera ley de Newton se llaman **marcos de referencia inerciales**. En el interior de un bus que frena, por ejemplo, (fig. 1.1b), los pasajeros experimentan un "empujón" hacia adelante, aunque nadie parece empujarlos: el interior de un bus que frena no es un marco de referencia inercial. Lo que se hace en estas situaciones es analizar la situación desde un marco de referencia que sí es inercial: para propósitos prácticos el suelo es un marco de referencia inercial. Lo que ocurre en la fig. 1.1b, visto desde el suelo, es que el bus reduce su velocidad debido a los frenos mientras que los pasajeros mantienen la velocidad original, por lo que se desplazan hacia adelante respecto al bus. Hay que tener en cuenta que el problema surge porque el bus está frenando; al moverse con velocidad constante sí es un marco de referencia inercial, como los dos veleros de la fig. 1.1c, que navegan a velocidad constante en un día tranquilo. Ambos se observan mutuamente sin fuerzas y permaneciendo en su viaje con velocidad constante.

La primera ley de Newton nos permite decir si se puede aplicar la segunda y la tercera: solo en marcos de referencia inerciales se pueden aplicar las demás leyes de Newton.

1.2 Segunda ley de Newton

Hemos dicho que una fuerza es la causa del cambio del movimiento. Isaac Newton describe ese movimiento en línea recta con velocidad constante con una cantidad llamada *moméntum*, que estudiaremos más adelante. El moméntum se define como

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$$

Newton propone que al ser una fuerza la responsable de que se cambie su movimiento en línea recta con velocidad constante, la fuerza produce un cambio en el moméntum de una partícula. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{\mathbf{v}})$$

si la masa es constante (no cambia con el tiempo), entonces podemos poner

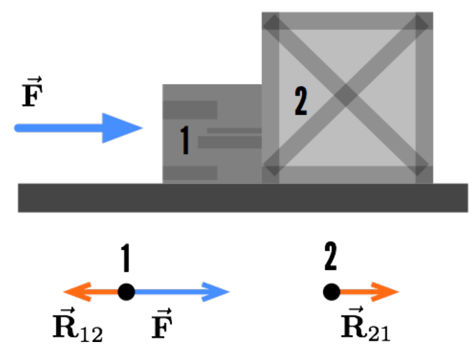
$$\vec{\mathbf{F}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{\mathbf{a}}$$

Si conocemos cualquier fuerza en función del tiempo $\vec{\mathbf{F}}(t)$, con la segunda ley podemos encontrar siempre la posición de la partícula en función del tiempo $\vec{\mathbf{r}}(t)$; es decir, la segunda ley de Newton sirve para encontrar la trayectoria de una partícula.

Si hay más de una fuerza, las fuerzas se suman, de forma que la segunda ley de Newton queda

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = m\vec{\mathbf{a}}$$

1.3 Tercera ley de Newton



La tercera ley de Newton dice que cada fuerza viene acompañada por otra, llamada *fuerza de reacción*, que va en la dirección opuesta y con la misma magnitud de la fuerza aplicada.

Ejemplo 1.1. *Reacción.*

Se aplica una fuerza sobre dos objetos, 1 y 2. Las fuerzas aplicadas sobre uno las representamos en un *diagrama de cuerpo libre*, y su sumatoria es

$$-R_{12} + F = m_1 a$$

Ahora, en el cuerpo 2 existe la fuerza de reacción $\vec{\mathbf{R}}_{21}$, que, por segunda ley de Newton,

$$R_{21} = m_2 a$$

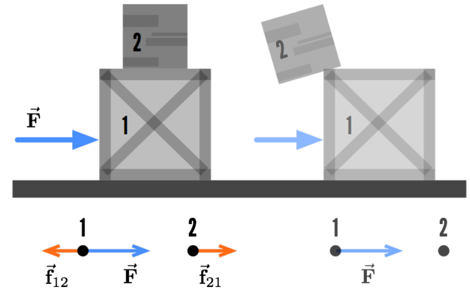
La aceleración de 1 y 2 es la misma porque están en contacto y no se deforman. Ahora, la tercera ley de Newton dice que $\vec{\mathbf{R}}_{12} = -\vec{\mathbf{R}}_{21}$, pero como ya las direcciones están incluidas en los signos de la sumatoria, $R_{12} = R_{21}$. Por lo tanto,

$$F - m_2 a = m_1 a \implies F = (m_1 + m_2)a$$

Esto no sorprende, puesto que la fuerza debe mover ambos objetos; la otra forma de interpretar este resultado es que el movimiento de m_1, que está descrito por la aceleración

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

se ve afectado por la presencia de m_2.



Ejemplo 1.2. *Caja sobre otra.*

Ahora tenemos una caja sobre otra, y se empuja la de abajo. A la derecha tenemos lo que pasaría si entre las cajas solamente existiera la fuerza F: la caja de arriba se caería. Por eso, para que ambas cajas se muevan debe existir una fuerza que llamamos **fricción**. Sumamos fuerzas en la caja 1:

$$F - f_{12} = m_1 a$$

y en la caja 2:

$$f_{21} = m_2 a$$

Por tercera ley de Newton, la fricción que sobre 2 hace 1 debe ser la misma, en sentido contrario, que sobre 1 hace 2. Por eso,

$$F - m_2 a = m_1 a \implies F = (m_1 + m_2) a$$

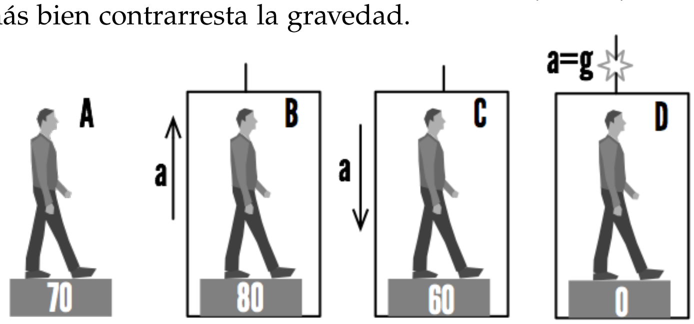
y obtenemos el mismo resultado anterior.

1.4 Fuerza de gravedad, peso

Definimos la **fuerza de gravedad** de un objeto $\vec{\mathbf{F}}_W$ como su masa multiplicada por la gravedad local terrestre

$$\vec{\mathbf{F}}_W = -m\vec{\mathbf{g}} = -mg\,\hat{\mathbf{y}}$$

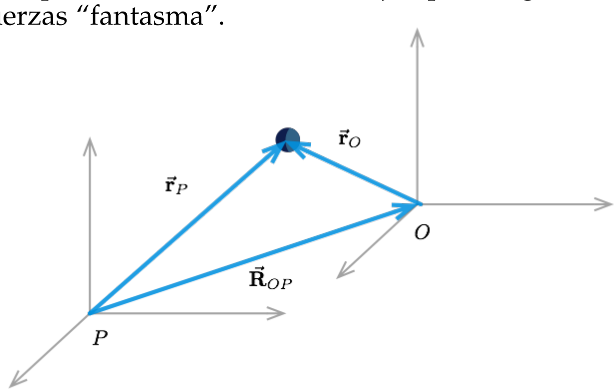
si definimos positivo hacia arriba. Ahora bien, vamos a definir "peso percibido" en el marco de referencia del objeto sujeto a la fuerza que más bien contrarresta la gravedad.



En A, el "peso percibido" es $F_S = mg$, puesto que la única fuerza con la que se percibe el peso es con la reacción del piso. La báscula marca 70 kg. En B, el sujeto está en un elevador que sube. Su gravedad percibida será $F_S - mg = ma$, con lo que $F_S = m(g + a)$ y por lo tanto "siente más peso" al subir el elevador. La báscula marca 80 kg. Al bajar el elevador, el sujeto siente "menos peso", puesto que la gravedad percibida será $F_S - mg = -ma$, con lo que $F_S = m(g - a)$. La báscula marca 60 kg. Si el cable del elevador se rompe y todos los mecanismos de seguridad fallan, la báscula marca cero, puesto que $F_S - mg = -mg$, con lo que $F_S = 0$.

1.5 Transformación de Galileo

Sin importar el marco de referencia que escojamos, si es inercial, los resultados de nuestros cálculos deben dar lo mismo. Podemos convertir el movimiento entre marcos de referencia inerciales. Dos marcos de referencia inerciales, como ya vimos, pueden tener un movimiento rectilíneo uniforme relativo, pero uno no puede estar acelerado respecto al otro, pues, ocurriría como en el ejemplo del globo en el carrito: aparecen fuerzas “fantasma”.



Suponga que tenemos dos marcos de referencia, O y P, en movimiento relativo uno del otro. La posición del origen de P respecto al origen de O es $\vec{\mathbf{R}}_{PO}$, y la posición del origen de O respecto al origen de P es $\vec{\mathbf{R}}_{OP}$. Resulta que $\vec{\mathbf{R}}_{PO} = -\vec{\mathbf{R}}_{OP}$. Suponga que conocemos la posición de una partícula respecto a O. Su posición respecto a P sería

$$\vec{\mathbf{r}}_P = \vec{\mathbf{r}}_O + \vec{\mathbf{R}}_{OP}$$

Por otro lado, si conocemos la velocidad de la partícula respecto a O, podemos conocerla respecto a P si derivamos a ambos lados la ecuación anterior:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{R}}_{OP}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_O + \vec{\mathbf{V}}_{OP}$$

Pero la aceleración sería

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}_P}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}_O}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_P = \vec{\mathbf{a}}_O$$

puesto que para que sean dos marcos de referencia inerciales debe haber velocidad constante entre ellos, sin aceleración, por lo que $\vec{\mathbf{A}}_{OP} = 0$. Por lo tanto, los marcos de referencia se mueven con m.r.u. entre sí. Si ambos marcos de referencia coinciden en $t = 0$:

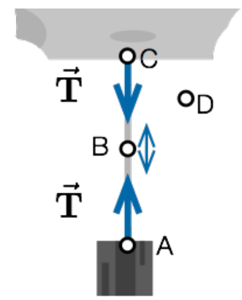
$$\vec{\mathbf{R}}_{OP} = \vec{\mathbf{V}}_{OP}t$$

con lo que la posición medida en el marco P a partir de la posición medida en el marco O sería:

$$\vec{\mathbf{r}}_P = \vec{\mathbf{r}}_O + \vec{\mathbf{V}}_{OP}t$$

A esta ecuación la llamamos *transformación de Galileo*, e indica el *principio de relatividad* de la mecánica clásica.

2 Aplicaciones de las Leyes de Newton



2.1 Tensión en una cuerda

En una cuerda hay fuerzas llamadas *tensiones*, las cuales estiran siempre la cuerda sin alterar su tamaño (cuerda no elástica). Si la cuerda no es elástica, la tensión es igual en toda la cuerda.

La suma de fuerzas se hace en un punto dado. En la figura vemos cómo se ve la tensión desde diferentes puntos. El sistema está en equilibrio, por lo que en todos los puntos la suma vectorial de las fuerzas debe dar el vector cero. Desde el punto A, la tensión va hacia arriba, pues impide que se caiga la caja (la otra fuerza en A, que no dibujamos, sería la gravedad de la caja); desde el punto C, la tensión va hacia abajo, haciendo que el techo soporte una carga (la otra fuerza en C sería la reacción del techo). En B observamos que la tensión estira cada punto de la cuerda, de forma que en ese punto la suma de fuerzas da cero porque el punto B se estira a ambos lados con la misma fuerza. En el punto D podemos intentar hacer suma de fuerzas, y da cero porque en el punto D no hay fuerzas aplicadas.

Tensiones “negativas” (en dirección contraria a la establecida en el diagrama) no tienen sentido, pues indicarían que la cuerda no está estirada, y esa es una condición necesaria para que haya una tensión.

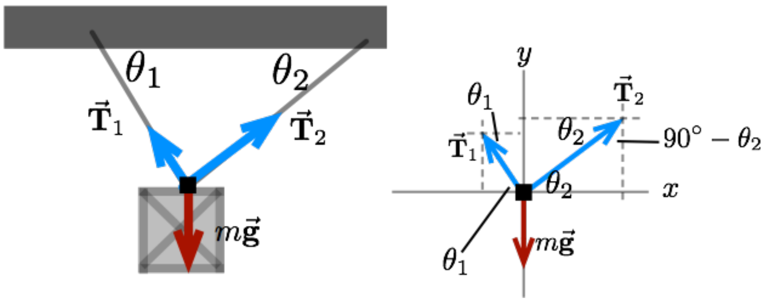
Diagrama de fuerzas

- La suma de fuerzas solo se puede hacer en un punto dado. No se pueden mezclar fuerzas aplicadas en diferentes puntos.

- Hay que considerar cada cuerpo como una partícula. Se puede hacer una suma de fuerzas en cada partícula del sistema.

- Hay que decidir la orientación del sistema de coordenadas en cada partícula. Se puede hacer una elección diferente para cada partícula.

- Hay que verificar si hay relación entre las aceleraciones o fuerzas (especialmente las de reacción) entre las partículas del sistema.



Ejemplo 2.1. *Caja colgada.*

Una caja está siendo sostenida por dos cuerdas como en la figura. Calcule las magnitudes de las tensiones de las cuerdas si conocemos los ángulos θ_1 y θ_2, y la masa m.

Queremos conocer las magnitudes de las tensiones T_1 y T_2 para que la caja esté en equilibrio. Hacemos suma de fuerzas en el punto de unión de la caja con las cuerdas. Esta suma de fuerzas debe dar cero para que haya equilibrio. Vamos a elegir el eje x positivo hacia la derecha, y positivo hacia arriba. Ahora, hacemos una suma de fuerzas en el eje x:

$$-T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = 0$$

ahora en el eje y:

$$T_2 \sin\theta_2 + T_1 \sin\theta_1 - mg = 0$$

Tenemos un sistema de ecuaciones. Despejamos T_1 de la primera ecuación:

$$T_1 = T_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

sustituimos en la segunda ecuación,

$$T_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 - mg = 0$$

reacomodamos y despejamos T_2

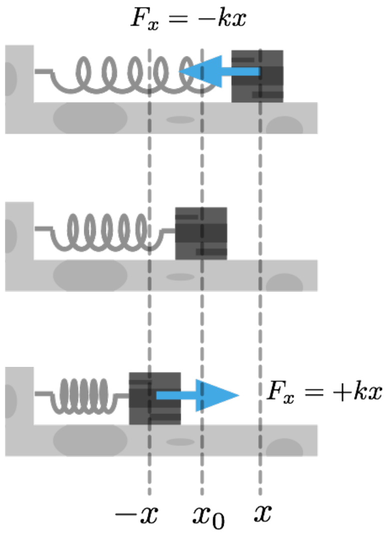
$$T_2 = mg \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1}$$

Ahora, si sustituimos $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ vemos que $T_1 = T_2$ como anticipamos anteriormente. Además,

$$T_2 = mg \frac{\cos\theta}{2 \sin\theta \cos\theta} = \frac{mg}{2 \sin\theta}$$

o sea que $T_{2y} = T_2 \sin\theta = mg/2$ como se anticipaba.

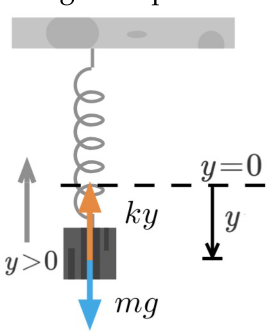
2.2 Fuerza elástica



Las fuerzas elásticas deforman el tamaño de un cuerpo. Un resorte cumple aproximadamente con la Ley de Hooke:

$$F_x = -k(x - x_0)$$

x_0 es la posición de equilibrio del resorte, es decir, su posición cuando no está sometido a ninguna fuerza (relajado). k se llama *constante del resorte*, e indica qué tan elástico o no es un resorte (qué tanto se estira con una fuerza aplicada). El signo menos significa que la fuerza es una *fuerza restauradora*, es decir que intenta restaurar el resorte a su longitud original de equilibrio. Como se ve en la figura, el signo menos en en realidad simbólico; hay que hacer un análisis de fuerzas para determinar su signo respecto a nuestra elección del marco de referencia.



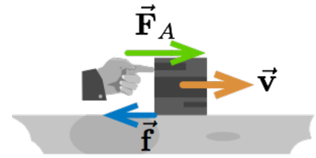
Ejemplo 2.2. *Medición de la constante del resorte.*

Si tenemos un resorte ubicado de forma vertical, y tiene una masa m que cuelga, éste se estira una longitud y. Según la figura, sabemos que si el resorte y la caja están en equilibrio, la suma de fuerzas en y debe dar cero:

$$ky - mg = 0 \implies k = \frac{mg}{y}$$

y con eso podemos medir experimentalmente k para un resorte.

2.3 Fricción

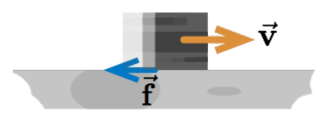


La fricción es una fuerza que surge del contacto entre dos superficies. La fricción se opone a las fuerzas aplicadas, pero siempre en dirección *paralela* a la superficie. La fricción es complicada, pues ocurre debido a que los materiales son rugosos a nivel microscópico; sin embargo, podemos aproximarla como la siguiente función:

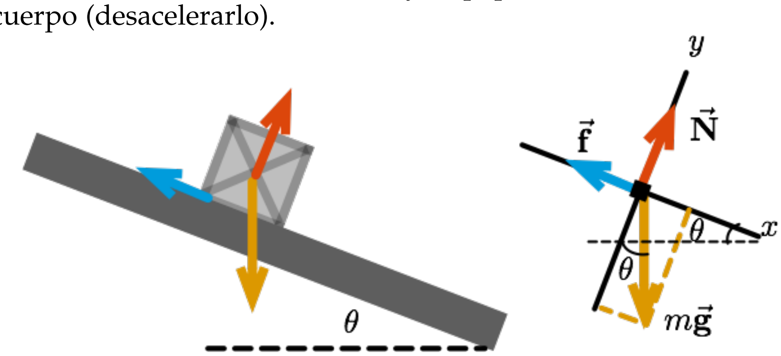
Supongamos una caja en una superficie con fricción, a la que se le aplica una fuerza F_A. La velocidad relativa entre la caja y la superficie es v. El valor de la fricción depende del valor de F_A y del valor de v:

$$f = \begin{cases} 0, & F_A = 0,\ v = 0 \\ -F_A, & F_A \leq \mu_s N,\ v = 0 \\ -F_A, & F_A = \mu_s N,\ v > 0 \\ \mu_k N, & F_A > \mu_s N,\ v > 0 \\ \mu_k N, & F_A = 0,\ v > 0 \end{cases}$$

donde N es la normal del objeto (fuerza de reacción de la superficie) y μ es el *coeficiente de fricción*. Podemos escoger de esa función el valor de la fricción que aplica en el caso que estemos analizando. Hay dos tipos de fricción: estática (cuando $v = 0$), y cinética (cuando $v > 0$). Hay dos tipos de coeficientes de fricción: estático (μ_s) y cinético (μ_k). Siempre $\mu_s > \mu_k$. Como se ve en la función, la fricción estática es cero si no hay fuerzas ni movimiento, contrarresta perfectamente a la fuerza aplicada siempre y cuando esta no exceda el valor $mu_s N$; cuando la fuerza aplicada llega a ese valor, el cuerpo se empieza a mover pero con velocidad constante, y cuando se aplica más fuerza, el cuerpo se mueve de forma acelerada y el valor de la fricción es menor.



La única manera de que haya solo fricción como fuerza en un cuerpo es si es fricción cinética. En este caso, la velocidad solo puede ir en la dirección contraria a la fricción, y el papel de la fricción es detener al cuerpo (desacelerarlo).



Ejemplo 2.3. *Fricción en plano inclinado.*

Una caja descansa sobre un plano inclinado con coeficiente de fricción estática μ_s. Calcule el ángulo θ en el cual la caja se empieza a deslizar.

Utilicemos un sistema de coordenadas inclinado como en la figura, aunque pudimos haber usado la orientación de los ejes que quisiéramos. El resultado es el mismo. Vamos a determinar a qué ángulo se empieza a caer la caja. Esto ocurre en el límite en el que $f = \mu_s N$. Hacemos una suma de fuerzas en x: (Nótese que la fricción solo actúa en la superficie de contacto de los cuerpos. Sin embargo, estamos considerando la caja como una partícula, por lo que todas las fuerzas van en el diagrama)

$$\mu_s N - mg \sin\theta = 0$$

y ahora en y:

$$N - mg\cos\theta = 0 \implies N = mg\cos\theta$$

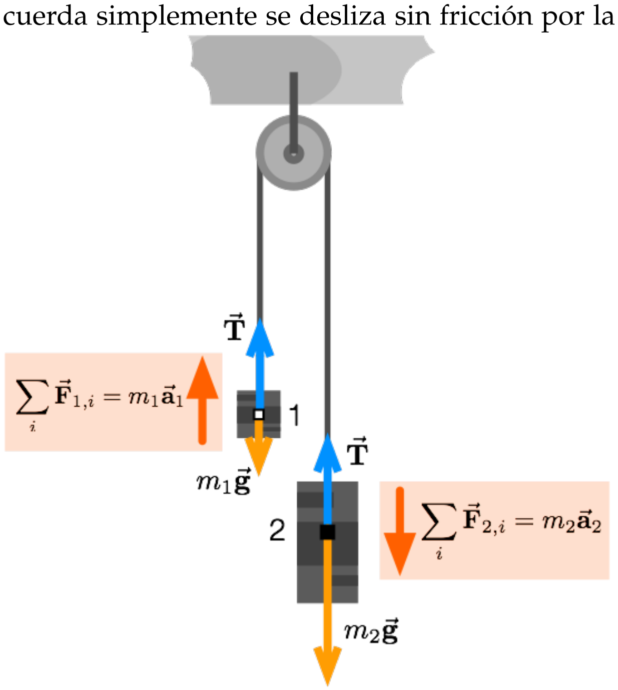
usando la primera ecuación,

$$\mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta \implies \mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Con eso vemos que el coeficiente de fricción estático es realmente adimensional, y corresponde a la tangente del ángulo en el que se desliza la caja. Entonces, si dos superficies se deslizan cuando $\theta = 45°$, significa que $\mu_s = 1$; cuando $\theta = 30° \implies \mu_s = 0.577$; $\theta = 60° \implies \mu_s = 1.73$. Ahora, vemos que el coeficiente de fricción solo depende de las superficies en contacto, no de la masa de la caja.

2.4 Poleas

En este capítulo, trataremos las poleas como simples puntos donde se cambia la dirección de una cuerda, sin masa. Podemos imaginar que la cuerda simplemente se desliza sin fricción por la polea.



Ejemplo 2.4. *Máquina de Atwood.*

Dos masas m_1 y m_2 están unidas a una cuerda que pasa por una polea, como en la figura. Calcule la tensión de la cuerda y la aceleración del sistema.

Debemos hacer sumas de fuerzas en los dos cuerpos, 1 y 2. Queremos determinar la aceleración del sistema. Tenemos libertad para poner nuestro marco de referencia en la orientación que creamos conveniente. Vamos a elegir positivo hacia arriba en ambos cuerpos, pero eso significa que la aceleración en uno es el negativo de la otra.

$a_1 = -a_2 = a$. Para la caja 1:

$$T - m_1 g = m_1 a$$

Para la caja 2:

$$T - m_1 g = -m_2 a$$

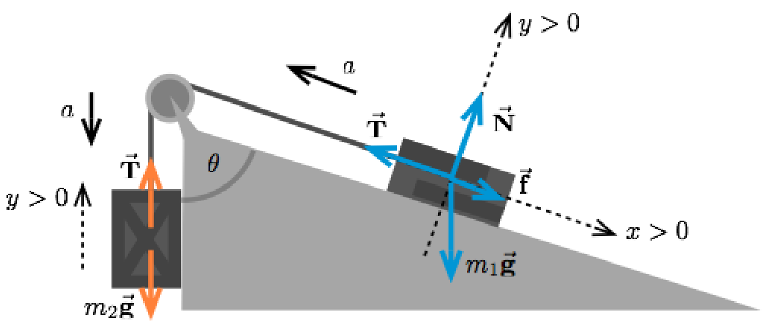
combinando,

$$m_1 a + m_1 g - m_2 g = -m_2 a$$

$$\implies m_1 g - m_2 g = -m_2 a - m_1 a \implies a = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Como vemos, si $m_1 = m_2$, la aceleración es cero, pues implica que la máquina de Atwood se balancea.

2.5 Ejemplos adicionales



Ejemplo 2.5. *Cajas y plano inclinado.*

Si $m_1 = 1\,\text{kg}$, $m_2 = 5\,\text{kg}$, $\theta = 60°$, $\mu_k = 0.13$, calcule la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.
Suma de fuerzas en la caja 2:

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

Suma de fuerzas en y para la caja 1:

$$N - m_1 g \sin\theta = 0 \implies N = m_1 g \sin\theta$$

Suma de fuerzas en x para la caja 1:

$$-T + m_1 g \cos\theta + \mu_k N = m_1 a_1$$

$$-T + m_1 g \cos\theta + \mu_k m_1 g \sin\theta = m_1 a_1$$

Ahora bien, según vemos en el diagrama, $a_1 = -a$, $a_2 = -a$. Sustituimos la suma de fuerza en 2 en la suma de fuerzas en x para 1:

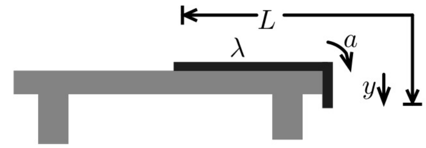
$$m_2 a - m_2 g + m_1 g \cos\theta + \mu_k m_1 g \sin\theta + m_1 a = 0$$

Sustituyendo valores numéricos,

$$a = 7.17\,\text{m/s}^2$$

$$T = 13.15\,\text{N}$$

Ejemplo 2.6. *Cadena que cae.*



Consideremos una cadena de longitud L y densidad lineal de masa λ $(= m/L)$, que está sobre una mesa, excepto por un pedazo de longitud b que cuelga del filo de la mesa. Se suelta la cadena y esta cae en un movimiento acelerado. Encuentre la aceleración (variable), la aceleración inicial, y demuestre que cuando toda la cadena está en el aire, el movimiento es de caída libre común.

La única fuerza que provoca la caída de la cadena es el peso de la parte que está colgando. Este peso es la masa colgante en función del tiempo, λy multiplicada por g. Eso es igual a la masa por aceleración, según la segunda ley de Newton:

$$\lambda y g = ma \implies \lambda y g = \lambda L \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

lo cual implica que

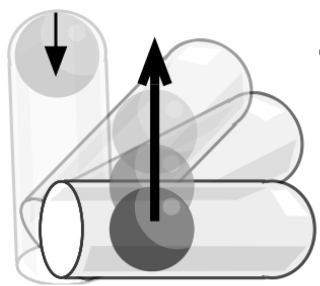
$$a = \frac{g}{L} y$$

la aceleración inicial es cuando $y = b$: $a = gb/L$, y la aceleración cuando cae toda la cadena es cuando $y = L$: $a = gL/L = g$, que implica que la caída de la cadena se vuelve caída libre.

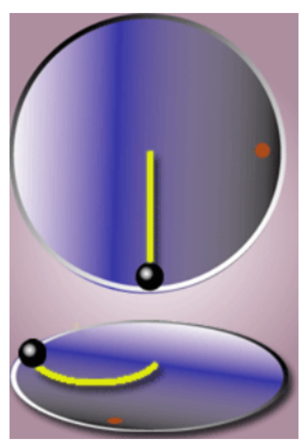
Para encontrar la posición como función del tiempo de la caída de la cadena, podríamos usar nuestra "tabla de simulaciones", sustituyendo $a = gy/L$ e ignorando la columna de F. Con ello fácilmente podemos elaborar la gráfica de cómo cae la cadena de forma acelerada en el tiempo.

3 Movimiento circular

3.1 La necesidad de una fuerza para curvar la trayectoria



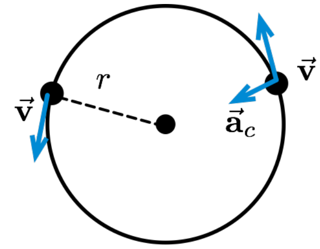
Una canica se pone en el interior de un tubo de ensayo como muestra la figura (todo está en una mesa horizontal). El tubo de ensayo se pone a girar. Al principio, la canica se mueve en línea recta con velocidad constante, pero luego esta se topa con las paredes de la canica, y al hacerlo, la canica se mueve ahora con un movimiento circular uniforme, pero para ello *necesita de la fuerza* de las paredes del tubo. A esta fuerza se le llama **fuerza centrípeta**. Para una hormiga que esté dentro del tubo, sin embargo, la canica se desplaza desde la boca del tubo hasta el fondo de forma acelerada. La hormiga ve una “fuerza fantasma”, llamada *fuerza centrífuga*. Si la hormiga fuera estudiante de física, sabría que lo que pasa es que como la bola no se mueve en línea recta con velocidad constante ella no se encuentra en un marco de referencia inercial, por lo que no hay ninguna fuerza centrífuga.



3.2 Efecto Coriolis

Veamos qué ocurre cuando tenemos un cuerpo moviéndose relativo a un marco en rotación. Tenemos un disco en movimiento, como los antiguos tocadiscos. Tomamos un lápiz y dibujamos una línea recta desde el reposo en el disco en movimiento. Si detenemos el disco, la línea dibujada no se ve como una recta, sino como una curva. A esta desviación que ocurre al *mover un cuerpo* en un marco de referencia en rotación se le llama **efecto Coriolis**, y es el principal responsable de la formación de huracanes.

3.3 Movimiento circular uniforme



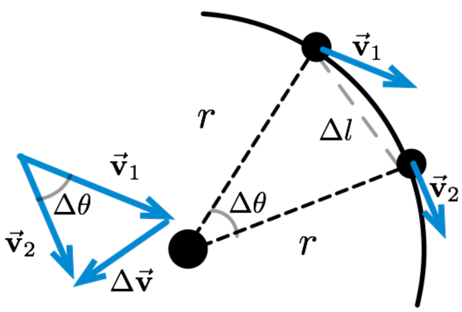
Como hemos visto, para un movimiento circular uniforme se requiere una aceleración hacia adentro, la aceleración centrípeta a_c. La velocidad siempre es tangencial a la trayectoria de la partícula. La posición de la partícula es siempre en algún lugar de la trayectoria circular de radio r.

El tiempo que tarda una partícula en dar una vuelta se llama **período** T. Las veces que la partícula da la vuelta por segundo se llama **frecuencia** f, $\mathcal{U}[f] =$ Hz (Hertz). El arco que recorre la partícula en un tiempo dado lo encontramos con

$$s = r\theta$$

donde θ es el ángulo recorrido en ese tiempo. La **velocidad angular** ω es el ángulo recorrido en un tiempo dado, y es constante para un movimiento circular uniforme.

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$



La velocidad tangencial se relaciona con la velocidad angular con

$$v = \omega r$$

puesto que $ds = rd\theta \implies ds/dt = rd\theta/dt$.

Queremos encontrar una relación entre la aceleración centrípeta y la velocidad del objeto. Para ello, vemos que los triángulos formados por el radio y la velocidad son semejantes, pues tienen el ángulo θ en común, siempre que este sea pequeño. Entonces,

$$\tan\theta = \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l}$$

con ello, despejamos

$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta l$$

ahora, como θ es pequeño,

$$dv = \frac{v}{r}dl$$

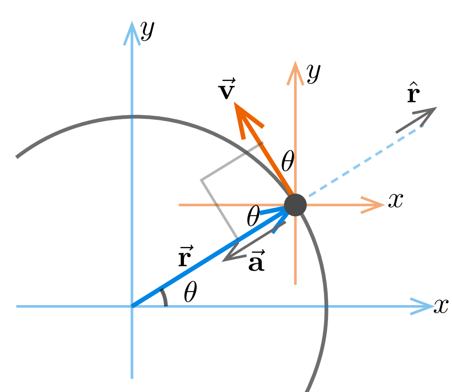
con esto sustituimos en la aceleración

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{r}\frac{dl}{dt}$$

Ahora bien, dl/dt es la velocidad tangencial, pues está medida a lo largo del arco. Entonces, finalmente

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

3.4 Coordenadas polares: posición, velocidad y aceleración



Las coordenadas polares son r y θ. Se relacionan con las coordenadas cartesianas con la ecuación

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta$$

Un vector unitario radialmente hacia afuera es $\hat{\mathbf{r}}$.
La posición de la partícula es

$$\vec{\mathbf{r}} = r\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

y siempre apunta hacia afuera, por lo que podemos decir $\vec{\mathbf{r}} = r\,\hat{\mathbf{r}}$, con lo que

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

Domo en un movimiento circular uniforme $\omega = \theta/t$,

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}}$$

La velocidad será

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -r\omega\sin(\omega t)\,\hat{\mathbf{x}} + r\omega\cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{y}}$$

La magnitud de ese vector es

$$v = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r\omega$$

con lo que hemos demostrado que $v = \omega r$, y que el vector unitario en dirección tangencial es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

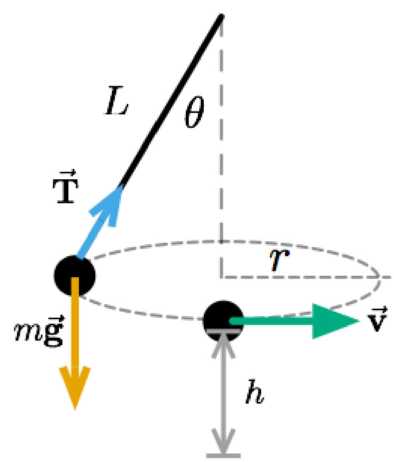
con lo que la velocidad tangencial es $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\boldsymbol{\theta}} = \omega r\hat{\boldsymbol{\theta}}$.
Ahora, la aceleración es

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = -r\omega^2\cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{x}} - r\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{\mathbf{y}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}$$

Con lo que hemos visto cómo la aceleración centrípeta es radial hacia adentro.
Entonces, para que haya un movimiento circular uniforme debe cumplirse que

$$\sum F_r = -ma_c$$

Ejemplo 3.1. *Péndulo cónico.*



Sabiendo m, L, θ y h, queremos determinar la tensión T. Luego, rompemos la cuerda y la bola debería salir disparada en dirección tangente a la trayectoria circular. Si la altura con el suelo es h, queremos saber qué tan lejos llega.

Hacemos una suma de fuerzas vertical (z)

$$\sum F_z = T\cos\theta - mg = 0$$

con eso, sabemos que la tensión es $T = mg/\cos\theta$. Ahora, hacemos suma de fuerzas radial

$$\sum F_r = T\sin\theta = ma_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\theta$$

Con esto despejamos $\omega = \sqrt{T/mL} = \sqrt{g/(L\cos\theta)}$. Ahora, cuando cortamos la cuerda, la velocidad es

$$v = \omega r = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}\,L\sin\theta$$

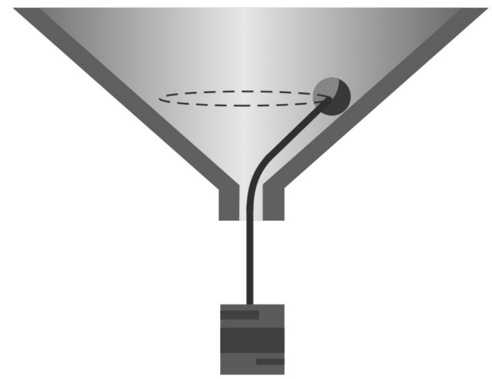
Ahora tenemos un tiro parabólico, cuya altura inicial es h. El tiempo que tarda en desplazarse en z la bola es el mismo tiempo en el que se desplaza en la dirección horizontal. Entonces el tiempo de caída es

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

puesto que $v_{0z} = 0$, $z - z_0 = h$. La rapidez inicial horizontal es la misma rapidez v tangencial. El desplazamiento recorrido $x - x_0 = d$ es entonces

$$d = vt = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}} L \sin\theta \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

conocemos todas las variables, por lo que la respuesta está completa (falta simplificar).

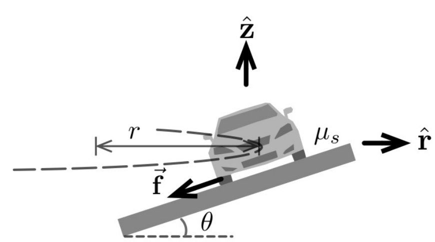


Ejemplo 3.2. *Embudo.*

En la figura tenemos un embudo de inclinación θ medida respecto a la horizontal en el cual se desliza una canica de masa m amarrada a un peso de masa M por medio de una cuerda. Si la canica se desliza sin fricción por una trayectoria circular de radio r, hay que encontrar la frecuencia (veces por segundo) que la canica debe girar para que no se caiga el peso.

Guía para solución: Haga un diagrama de fuerzas de forma similar al que hicimos para el péndulo cónico, tanto para la canica como para el peso. El diagrama del peso nos indica cuánto vale la tensión si el peso no cae: $T = Mg$. Ahora, hay que hacer el diagrama de la canica teniendo el cuidado de elegir bien los ejes $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Recuerde que la aceleración centrípeta va en la dirección de $-\hat{\mathbf{r}}$ (está en el plano de la trayectoria circular), *no es paralela a la superficie del embudo*, por lo que *no conviene elegir ejes rotados* como sí convenía en el caso del plano inclinado. En otras palabras, hay que descomponer $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{T}}$ en dos componentes para que $\vec{\mathbf{a}}_c$ solo tenga una componente. Si eligiéramos los ejes rotados, tendríamos vectores unitarios variables, y el problema se complica bastante (consulte las "Notas del curso: Cinemática", sección 4.1, sobre las derivadas de vectores unitarios). Una vez que se hizo la descomposición de fuerzas tanto en r como en z, tenemos un sistema de ecuaciones del que hay que despejar a_c, pues sabemos que $a_c = \omega^2 r$, y $\omega = 2\pi f$, de donde encontramos la frecuencia necesaria para que el sistema no se caiga. La frecuencia debería dar

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg\sin\theta + mg + Mg\cos^2\theta}{rm\cos\theta}}$$



Ejemplo 3.3. *Peralte.*

En las carreteras, a las curvas se les añade una inclinación llamada **peralte**. El propósito es prevenir que los carros derrapen al tomar la curva a altas velocidades. Considere una curva con peralte como en la figura. Primero, como sugerencia, dibuje el mismo diagrama pero con $\theta = 0$ para convencerse de que la fricción debe ir hacia adentro para que el carro vaya en trayectoria circular. Ahora, suponga que sabemos el máximo valor de la fricción, que corresponde al coeficiente μ_s, el radio de la curva r y el ángulo de peralte θ.

a) Calcule la velocidad máxima a la que el carro puede ir sin derrapar. Muestre que no depende de la masa del carro. Su respuesta solo puede contener μ_s, r, θ y la constante g. (Sugerencia: no rote los ejes coordenados).

Ahora, si el radio de la curva es $r = 10\,\mathrm{m}$, calcule la velocidad máxima a la que el carro puede ir sin derrapar en las siguientes circunstancias:

b) Sin peralte: $\theta = 0$, $\mu_s = 0.8$

c) Con peralte: $\theta = 15°$, $\mu_s = 0.8$ (¿el peralte mejora la seguridad en carretera?)

d) Muestre que con peralte, la fricción ya no es necesaria para que haya movimiento circular. Para ello, sustituya $\mu_s = 0$, $\theta = 15°$.

Solución: Primero, seguimos la sugerencia y descomponemos los vectores $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{f}}$ en sus componentes en $\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{N}} = -N\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + N\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\mathbf{f}} = -f\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - f\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

Ahora vamos a sumar fuerzas en z:

$$\sum F_z = 0 \implies -mg + N\cos\theta - f\sin\theta = 0$$

como nos interesa la velocidad máxima sin derrapar, eso significa que f debe ser máxima $f_{max} = \mu_s N$:

$$-mg + N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta = 0$$

$$\implies N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg$$

$$\implies N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

Ahora la suma de fuerzas en r debe dar ma_c:

$$-N\sin\theta - f\cos\theta = -m\frac{v^2}{r}$$

$$N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = m\frac{v^2}{r}$$

insertando lo que es n y simplificando,

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}$$

Que, como vemos, no depende de la masa.

Ahora vamos a sustituir los valores numéricos:

b) $\theta = 0$, $\mu_s = 0.8 \implies v = 8.85\,\mathrm{m/s}$. En este caso la fricción es indispensable para que haya movimiento circular.

c) $\theta = 15°$, $\mu_s = 0.8 \implies v = 11.54\,\mathrm{m/s}$, por lo que sí, el peralte mejora la seguridad en carretera.

d) $\theta = 15°$, $\mu_s = 0 \implies v = 5.12\,\mathrm{m/s}$, por lo que no se necesita fricción para que haya movimiento circular y caemos en el caso del problema del embudo.

3.5 Movimiento circular no uniforme

De forma análoga al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, existe una *aceleración angular* α definida como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

y de forma análoga, la ecuación del movimiento angular es

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Vamos a considerar por lo pronto que $\theta_0 = \omega_0 = 0$. La posición de una partícula en movimiento circular uniformemente acelerado entonces será

$$\vec{\mathbf{r}} = r\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

con $\theta = \alpha t^2/2$. Para simplificar la notación, sea $\dot{\theta} = d\theta/dt (= \omega)$, y $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 (= \alpha)$ (estamos usando un punto encima, así como en cálculo se usa una prima).

Ahora sí: derivamos la posición para obtener la velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}} = -r\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + r\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

[La $\dot{\theta}$ salió de la regla de la cadena: como la derivada es respecto a t, hay que derivar lo que está adentro, es decir, θ, respecto a t también]

Volvemos a derivar para encontrar la aceleración. Hay que tener el cuidado de utilizar la regla del producto al derivar:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= -r\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{\mathbf{x}} + r\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\sin\theta)\,\hat{\mathbf{y}} \\ &= -r[\dot{\theta}^2\cos\theta + \sin\theta\ddot{\theta}]\,\hat{\mathbf{x}} + r[-\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{\theta}\cos\theta]\end{aligned}$$

[$\dot{\theta}$ queda al cuadrado porque sale otro nuevamente por la regla de la cadena] Sustituyamos $\dot{\theta} = \omega$ y $\ddot{\theta} = \alpha$:

$$\vec{\mathbf{a}} = -r[\omega^2\cos\theta + \alpha\sin\theta]\,\hat{\mathbf{x}} + r[-\omega^2\sin\theta + \alpha\cos\theta]$$

Ahora vamos a reordenar los términos que tienen α y los que tienen ω:

$$\vec{\mathbf{a}} = -r\omega^2[\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}] + \alpha r[-\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}]$$

Reconocemos que el primer término es la aceleración centrípeta. El segundo término va en dirección tangencial, y lo llamamos **aceleración tangencial**:

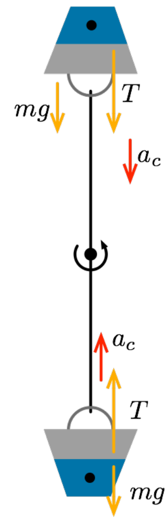
$$\vec{\mathbf{a}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}} + \alpha r\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Conclusión: en un movimiento circular no uniforme, hay dos aceleraciones: una va en dirección radial hacia adentro (aceleración centrípeta), y es la que provoca el movimiento circular, y la otra aceleración va en dirección tangencial, y es la que provoca que el cuerpo dé vueltas más rápido o más lento. La magnitud de la aceleración total sería

$$a = \sqrt{a_c + a_t}$$

No todo movimiento circular no uniforme es uniformemente acelerado. En el siguiente ejemplo, hay un balde de agua que da vueltas. Cuando el balde se acerca al suelo, va más rápido, pero cuando llega a la cúspide, va más despacio. De cualquier forma, lo que nos interesa a continuación es solamente la parte radial del movimiento.

Ejemplo 3.4. *Balde de agua*.



En la figura se muestra un balde que contiene agua en un movimiento circular. El movimiento es circular pero no uniforme; es más parecido al movimiento de un péndulo que da vueltas en lugar de regresar. Lo que ocurre es que hay gravedad, por lo tanto la suma de las fuerzas radiales no da siempre una aceleración centrípeta (en dirección radial). No obstante, podemos ver lo que le ocurre al agua en los puntos más alto y más bajo de la trayectoria, como está señalado en la figura.

En el punto más bajo,

$$-T + mg = -ma_c \implies T = m(g + \omega^2 r)$$

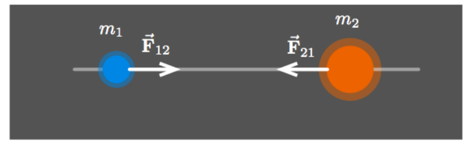
(hay más peso percibido). En el punto más alto,

$$-T - mg = -ma_c \implies T = m(\omega^2 r - g)$$

En el punto más alto, el peso percibido es menor. Observemos que si la tensión es cero, el agua caería, y eso ocurriría si $\omega^2 r = g$, con lo que podemos calcular las vueltas por segundo que hay que dar para que el balde no caiga con el agua: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/r}$

4 Gravitación

4.1 Ley de Gravitación Universal de Newton

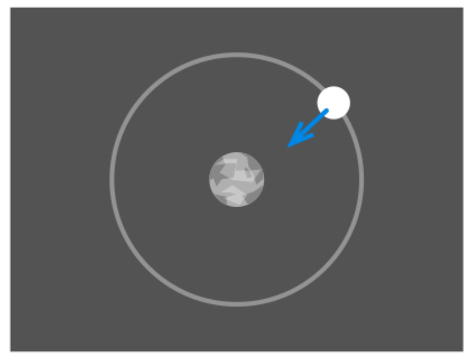


La fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos está dada por la *ley de Gravitación Universal de Newton*

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$$

donde $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2 es la *constante de gravitación universal*. El vector $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ es un vector unitario *radialmente hacia afuera* de la unión de ambos cuerpos. Como la gravitación es *radialmente hacia adentro*, la fuerza tiene un menos.

4.2 Órbitas circulares



En general, para encontrar la *órbita* de un planeta alrededor de una estrella o de varias estrellas orbitando unas alrededor de otras hay que resolver ecuaciones complicadas o usar el método de simulaciones numéricas que vimos anteriormente.

Un caso muy sencillo es en el que uno de los cuerpos es muy masivo comparado con el otro (por ejemplo, el Sol comparado con la Tierra), y que la órbita es circular. En este caso, la gravedad actúa como fuerza centrípeta. Encontremos el período de rotación de esa órbita. Primero, hacemos $\sum F_r = -ma_c$:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

con lo que, dado que $v = \omega r$,

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$$

y encontramos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

A esta ecuación tradicionalmente se le llama *tercera ley de Kepler*. Entre más lejos esté un planeta, es mayor su período (es decir, la duración de su .ªño").

Ejemplo 4.1. *Satélite del TEC.*

El satélite desarrollado por el Instituto Tecnológico de Costa Rica (Proyecto Irazú) tiene aproximadamente la misma altitud de órbita que la Estación Espacial Internacional, para la cual es de aproximadamente 400 km. Calcule el periodo del satélite, suponiendo que su órbita fuera circular perfecta.

Solución: Utilizamos la tercera ley de Kepler para encontrar

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} = 5533\,\mathrm{s} = 1.54\,\mathrm{h}$$

donde $h = 400\,\mathrm{km}$ de altitud y $R = 6370\,\mathrm{km}$.

Ejemplo 4.2. *Europa.*

Europa es una de las lunas de Júpiter. Con un telescopio se observa que el periodo de rotación de Europa es de $T = 3.5\,\mathrm{d} = 3.02 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$, y que su radio de la órbita es de $r = 6.7 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Estime la masa de Júpiter.

Utilizamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{(2\pi/T)^2 r^3}{G} = M = 1.95 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$$

4.3 Campo gravitacional

Vamos a definir el campo de aceleración gravitacional como

$$\vec{\mathbf{g}}_{12} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{12}}{m_2}$$

donde $m_2 << m_1$. Por ejemplo, para la Tierra, en su superficie,

$$|\vec{\mathbf{g}}_T| = g = \frac{GM_T}{R_T^2} \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

y de allí sale el famoso número de 9.8 de la aceleración gravitacional de la Tierra. La idea del campo gravitacional es que en cada punto que rodea la Tierra hay un vector que indica la aceleración de la gravedad.

4.4 Teorema de cascarones (opcional)

La ley de gravitación universal de Newton solamente es válida para partículas. En esta sección vamos a razonar lo que ocurre cuando tenemos cuerpos sólidos, en particular, una esfera.

Suponga que tenemos un planeta hueco, perfectamente esférico. En el centro, la fuerza de atracción gravitacional se cancela en todas partes, y da cero. Afuera, por simetría, la fuerza gravitacional debe ser igual a distancias iguales, y cuando estamos lo suficientemente lejos del cuerpo como para considerarlo partícula, será la de una partícula.

El teorema de cascarones, que no demostraremos (pero explicaremos cómo se hace en principio la demostración), consiste en descomponer un planeta sólido en cascarones, y cada cascarón a su vez se descompone en partículas. Se calcula el campo gravitacional que produce cada partícula y se suma (integra) para obtener el campo total del cascarón. Después de hacer todo eso, la conclusión es que el campo adentro de un cascarón es cero aún en los puntos que no están en el centro, y que el campo afuera es el mismo de una partícula de la misma masa que el total del cuerpo, y ubicada en su centro.

Además, otra consecuencia (la más importante quizá) del teorema es que para calcular el campo gravitacional que ejerce un planeta esférico sólido en un punto dentro del mismo, *solo hay que tomar en cuenta la materia que se encuentra por "debajo", y no por "encima"* del punto. La razón es que si dividimos el planeta en cascarones, los cascarones de arriba no ejercen fuerza gravitacional, y los de abajo, ejercen la de una partícula.

4.5 Ejercicios adicionales

Ejemplo 4.3. *Peso.*

Un astronauta de 100 kg pesa 980 N en la Tierra. ¿Cuánto pesaría en la Luna? $M_L = 7.36 \cdot 10^{22}$ kg, $R_L = 1.74 \cdot 10^6$ m.

En la Luna, $g_L = GM_L/R_L^2 = 1.62\,\mathrm{m/s^2}$, por lo que $mg_L = 162\,\mathrm{N}$.

Ejemplo 4.4. *Punto de Lagrange (sin fuerzas).*

¿Qué tan lejos de la Tierra, en términos de la separación Tierra-Luna d, debe ubicarse un satélite para que no experimente fuerza gravitacional ni de la Tierra ni de la Luna? La masa de la Luna es $M = 0.012M_T$. A ese punto se llama punto lagrangiano.

$$G\frac{M_T m}{x^2} = G\frac{Mm}{(d-x^2)}$$

Tomando la raíz cuadrada a ambos lados y resolviendo para x encontramos que $x = 0.90d$.

Ejemplo 4.5. *Partícula dentro de la Tierra.*

¿Cuál es la fuerza gravitacional sobre una partícula de masa m en un punto dentro de la Tierra, donde $r < R_T$?

Solo cuenta la masa que está por debajo de la ubicación de la partícula, por lo que

$$F = G\frac{mM'}{r^2}$$

donde

$$\frac{M'}{M_T} = \frac{4/3\pi r^3}{4/3\pi R_T^3}$$

con lo que

$$F = G\frac{mM_T}{R_T^3}r$$

(la fuerza se parece a la de un resorte!)

Ejemplo 4.6. *Estrellas binarias.*

Un sistema de estrellas binarias consisten de dos masas M idénticas, moviéndose en una órbita circular de radio R alrededor de un punto equidistante entre ambas. Determine: a) la fuerza gravitacional ejercida en cada estrella, b) el periodo del movimiento.

$$F = G\frac{M^2}{(2R)^2}$$

$$MR\omega^2 = GM^2/(4R^2) \implies T = 4\pi\sqrt{R^3/(GM)}$$

Ejemplo 4.7. *Satélite geosincrónico.*

Un satélite geosincrónico se pone en una órbita ecuatorial de forma que siempre apunte al mismo punto en la superficie terrestre, es decir, su periodo es de 24 h. ¿Cuál es la distancia al centro de la Tierra en la que debe ponerse el satélite?

De la fuerza centrípeta de una órbita circular,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}r^3$$

con $T = 24$ h, $r = 42300$ km.