TEC | Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Física

física general I

DEMOSTRACIONES TEÓRICAS

Autores: MSc. André Oliva

Editores:

versión 1.0

---

1. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

A continuación vamos a demostrar que las ecuaciones del movimiento con aceleración constante son:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{1}$$

$$v = v_0 + at \tag{2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3}$$

1.1. Parte 1: demostración de la ecuación (2)

Objetivos de aprendizaje:	reconocer por qué la velocidad instantánea es función lineal del tiempo; identificar el significado del área bajo la curva de una función $a(t)$.
Requisitos:	saber el concepto de aceleración instantánea.

Si el movimiento es con aceleración *constante*, la gráfica es una recta horizontal, que se muestra en la figura 1.

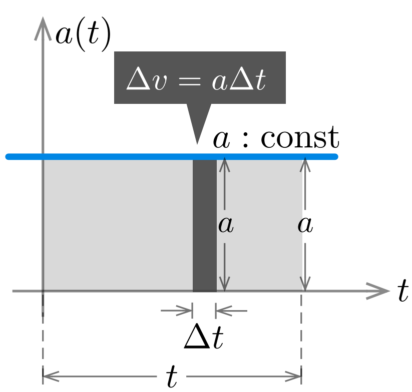

Figura 1: Gráfica de la aceleración en función del tiempo

Sabemos por la definición de aceleración instantánea es

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},\ \Delta t \text{ peq.} \implies \Delta v = a\Delta t,\ \Delta t \text{ peq.}$$

El rectángulo pequeño gris oscuro tiene un área base $\times$ altura $= \Delta t \cdot a$, que corresponde al cambio de velocidad en un intervalo pequeño de tiempo. Entonces, el cambio completo de velocidad es el área del rectángulo gris claro:

$$v - v_0 = at$$

$$\implies v(t) = v_0 + at \tag{4}$$

Vea que la velocidad instantánea es función lineal del tiempo.

1.2. Parte 2: demostración de la ecuación (1), usando gráficas

Objetivos de aprendizaje:	entender el significado de área bajo la curva de una gráfica $v(t)$; entender por qué la posición es función cuadrática del tiempo (¿de dónde sale el $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}at^2$?)
Requisitos:	saber la función de la velocidad instantánea para el m.r.u.a.
Observaciones adicionales:	esta demostración se hace con gráficas y no con la velocidad promedio (como se hace en los libros) por dos motivos: para preparar al estudiante para los problemas de interpretación de gráficas y para preparar el camino para cuando el estudiante vea integrales en cálculo diferencial e integral.

Considere la gráfica $v(t)$ del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Sabemos que $v(t)$ es la función lineal $v(t) = v_0 + at$. Vamos a hacer, por simplicidad, el caso cuando $v_0 = 0$. Graficamos entonces la función $v(t) = at$ (ver fig. 2):

Ahora nos fijamos en el rectángulo sombreado pequeño (gris oscuro). Calculemos el área de este rectángulo pequeño (base $\times$ altura $= \Delta t \cdot v$). Observemos que esta área corresponde al *desplazamiento* que la partícula tuvo en Δt, puesto que, según nuestra definición de velocidad instantánea,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ con } \Delta t \text{ peq.} \implies \Delta x = v\Delta t,\ \Delta t \text{ peq.}$$

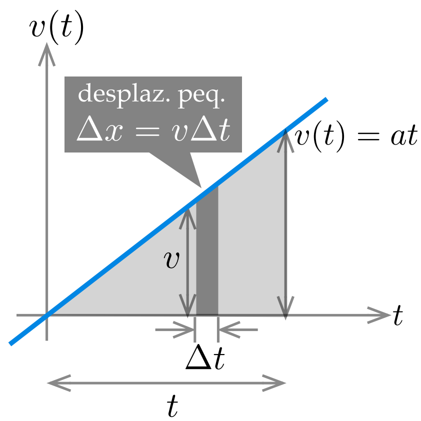

Figura 2: Gráfica de la velocidad en función del tiempo

Ahora decimos: si el área pequeña gris oscuro es el desplazamiento pequeño, el área grande gris claro (triángulo) será el desplazamiento total. Calculamos entonces el área del triángulo:

$$x(t) - x_0 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{t \cdot v(t)}{2}$$

Pero sabemos que $v(t) = at$, por lo que nos queda el desplazamiento total como

$$x(t) - x_0 = \frac{t \cdot (at)}{2} = \frac{at^2}{2}$$

o sea que

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Por último, ¿recuerda ud. que al principio pusimos $v_0 = 0$? ¿Qué pasaría si hay una velocidad inicial? Analicémoslo así: si hubiera velocidad inicial pero no hubiera aceleración, la velocidad en todo momento tiene que ser constante e igual a la inicial; en ese caso el movimiento tiene que ser rectilíneo uniforme. Entonces, si tenemos

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

se cumple esa condición (cuando $a = 0$, $x = x_0 + v_0 t$). Esta era la ecuación que queríamos demostrar. Este método de áreas bajo la curva en cálculo se llama la **integral**, y usted lo aprenderá en el curso de cálculo con mucho detalle.

1.3. Parte 3: demostración de la ecuación (3)

Objetivos de aprendizaje: reconocer el rango de aplicación de la ecuación $v^2(x)$; reconocer que basta con $v(t)$ y $x(t)$ para resolver los problemas de m.r.u.a.; dar un ejemplo de la manipulación algebraica que se espera del estudiante en los problemas.

Requisitos: conocer las ecuaciones (1) y (2).

Recordemos la ecuaciones que llevamos demostradas:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 & (1) \\ v = v_0 + at & (2) \end{cases}$$

Despejemos el tiempo de (2):

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Ahora, sustituyámoslo en (1):

$$x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

Por conveniencia futura, pasemos el x_0 al lado izquierdo. Apliquemos ley distributiva en el segundo término de la derecha y desarrollemos la fórmula notable cuadrática:

$$x - x_0 = \frac{v_0 v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2a}(v^2 + v_0^2 - 2vv_0)$$

Ahora, ley distributiva en el término entre paréntesis:

$$x - x_0 = \cancel{\frac{v_0 v}{a}} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} - \cancel{\frac{vv_0}{a}}$$

Ahora, restamos los dos términos que tienen v_0^2:

$$x - x_0 = -\frac{v_0^2}{2a} + \frac{v^2}{2a}$$

Mandamos el $2a$ a multiplicar:

$$\Longrightarrow \; 2a(x - x_0) = -v_0^2 + v^2$$

y por último, obtenemos la ecuación que buscábamos:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Resumen y conclusiones

En esta sección hemos obtenido varias cosas importantes:

1. El área bajo la curva de una gráfica $a(t)$ representa el *cambio de velocidad.*

2. El área bajo la curva de una gráfica $v(t)$ representa el *desplazamiento.*

3. Las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado salen de analizar las gráficas cuando $a =$ constante.

4. Las dos únicas ecuaciones importantes son la (1) y la (2), es decir, la trayectoria y la velocidad instantánea, respectivamente, puesto que son las que salieron del análisis de las gráficas. Con solo estas dos ecuaciones, se pueden resolver todos los problemas.

5. Despejando el tiempo de la ecuación (2) y sustituyéndolo en la (1), obtenemos la ecuación (3). Es decir, la ecuación (3) es un "atajo" que se puede usar cuando no se necesita el tiempo en el problema.

2. Teorema de trabajo–energía cinética

Objetivos de aprendizaje:	definir en qué situaciones se puede aplicar el teorema; reconocer la equivalencia de los métodos de suma de fuerzas y energía
Requisitos:	saber derivar una función potencial $f(x) = x^n$, la regla de la cadena y recordar la segunda ley de Newton

Definición matemática: Una **integral** $I = \int f dx$ es lo inverso de una derivada, y responde a la pregunta: ¿qué función I al derivarla me da f? Gráficamente corresponde al *área bajo la curva de la función f.*

Suponga que varias fuerzas actúan sobre un cuerpo de masa m. Para varias fuerzas, hay que calcular el trabajo para cada una y sumarlas para obtener el trabajo total.

$$W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} dx$$

donde $F_{\text{net}} = F_1 + F_2 + \cdots$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, sabemos que

$$F_{\text{net}} = ma = m\frac{dv}{dt}$$

Lo introducimos en la integral y obtenemos

$$W_{\text{net}} = \int m\frac{dv}{dt}dx$$

pero ahora identificamos $v = dx/dt$, con lo que la integral queda

$$W_{\text{net}} = \int mv\, dv$$

Decimos que la función que queremos integrar es mv, respecto a v, donde m es una constante.

Para resolver esta integral nos preguntamos, ¿qué función al derivarla me da mv? La respuesta es $\dfrac{mv^2}{2}$. Veamos: al derivar esa función, tenemos $m \cdot \dfrac{2v}{2} = mv$. Entonces, decimos que

$$\int mv\, dv = \frac{mv^2}{2}$$

Esta función se llama **energía cinética**, es decir, la energía del movimiento. Si un cuerpo ya traía una energía cinética inicial antes de aplicar la fuerza, hay que restársela de la energía cinética final, de modo que el trabajo neto entre dos puntos A y B queda

$$\underset{AB}{W_{\text{net}}} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} \tag{5}$$

A esta ecuación se le llama *teorema de trabajo–energía cinética.*

Resumen y conclusiones

El trabajo neto se calcula con la fuerza neta. Utilizando la segunda ley de Newton en el trabajo y reacomodando, llegamos al concepto de la energía cinética, o energía del movimiento. El trabajo neto es igual al cambio de energía cinética. Recalcamos que este teorema se cumple *solamente con el trabajo neto o total*, nunca individualmente con cada trabajo que actúa sobre el sistema, pues la segunda ley de Newton solo se cumple con la fuerza neta, nunca con cada fuerza individual. De esta demostración, también vemos que los resultados que podamos obtener con la segunda ley de Newton más cinemática y los que podamos obtener con el teorema de trabajo-energía cinética son equivalentes.

3. Trabajo de un resorte

Objetivos de aprendizaje:	conocer el origen del trabajo de un resorte; reconocer el área bajo la curva de una función fuerza contra posición como el trabajo.
Requisitos:	saber el concepto de integral

Consideremos un resorte de constante k. La fuerza de un resorte es, de acuerdo a la ley de Hooke, $F = -kx$, eligiendo $x = 0$ en la posición de equilibrio.

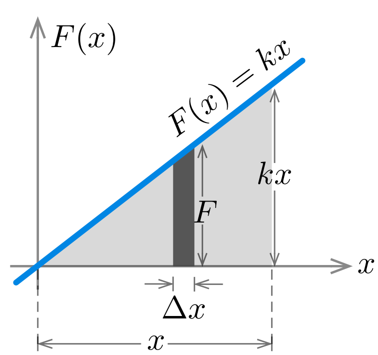

Figura 3: Gráfica de fuerza del resorte contra posición.

En la figura 3, hemos graficado la solo la magnitud de la fuerza del resorte contra la posición. Como vemos, el área pequeña gris oscuro tiene un área

$\Delta W = F\Delta x$, y representa el trabajo para un pequeño desplazamiento. El trabajo para todo el desplazamiento es la integral, o área bajo la curva, que en este caso sería el área del triángulo:

$$W = \int F dx = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{1}{2}kx^2$$

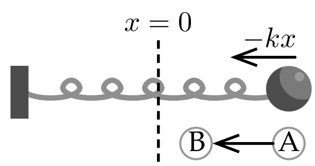

Figura 4: Movimiento de una partícula causada por un resorte

Ahora veamos qué ocurre en una situación física. En la figura 4 tenemos un resorte estirado. Queremos que el resorte desplace la partícula desde A hasta B. Sabemos que el trabajo tiene que ser positivo, porque tanto la fuerza como el desplazamiento van hacia la izquierda. Entonces, el trabajo será

$$W_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

Comprobamos: en la situación de la figura, $x_A > x_B$. Si el desplazamiento es hacia la izquierda (A hacia B), esa resta dará positivo, como debe ser (fuerza y desplazamiento en direcciones iguales); mientras que si el desplazamiento es hacia la derecha (B hacia A), la resta dará negativo, como debe ser porque la fuerza y el desplazamiento irían en direcciones opuestas.

4. Separabilidad de las energías cinéticas rotacional y traslacional

Objetivos de aprendizaje: reconocer la situaciones físicas donde se puede o no separar la energía cinética rotacional y traslacional.

Requisitos: conocer los conceptos de centro de masa y momento de inercia.

Vamos a demostrar que la energía cinética no se puede separar en energía cinética traslacional más energía cinética rotacional en el caso que se encuentra en la figura. Esto nos ayudará a entender cuándo sí se puede hacer la separación.

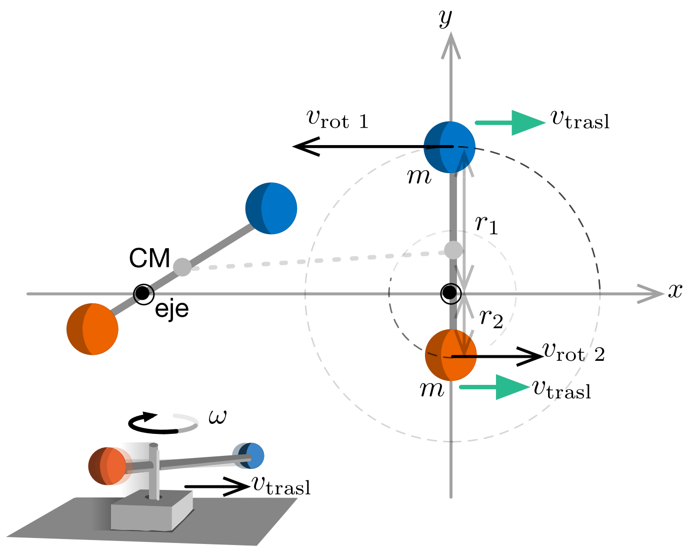

Figura 5: Rotación y traslación combinadas en un eje forzado

En la fig. 5, tenemos un bastón compuesto por dos partículas de masa m idénticas, unidas por una varilla rígida sin masa. Este bastón gira con una rapidez angular ω y se monta en un cuerpo móvil que se traslada con una velocidad v_{trasl} como se muestra en la figura pequeña.

Primero que nada, observe que el bastón gira alrededor de un **eje forzado**, es decir, un eje que no pasa por el centro de masa. ¿Por qué se llama forzado? Observe que las partículas 1 y 2 tendrán velocidades tangenciales diferentes, porque giran en círculos de diferentes radios. Eso implica que tendrán fuerzas centrípetas (radiales) diferentes. Pero como el bastón es rígido, la única opción es que en el eje se aplique una fuerza adicional que compense la diferencia.

Ahora calculemos la energía cinética del sistema. La velocidad rotacional tangencial de cada partícula es $v_{\text{rot}} = \omega r$; ω es igual para ambas (ambas completan una rotación al mismo tiempo), pero r es diferente. La velocidad traslacional es igual para ambas partículas. La velocidad total de la partícula

1 es, entonces,

$$v_{\text{total }1} = -\omega r_1 + v_{\text{trasl}}$$

La velocidad total para la partícula 2 es

$$v_{\text{total }2} = \omega r_2 + v_{\text{trasl}}$$

Entonces, la energía cinética total para cada partícula será:

$$K_1 = \frac{1}{2}m(-\omega r_1 + v_{\text{trasl}})^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2 r_1^2 - 2\omega r_1 v_{\text{trasl}} + v_{\text{trasl}}^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m(\ \ \omega r_2 + v_{\text{trasl}})^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2 r_2^2 + 2\omega r_2 v_{\text{trasl}} + v_{\text{trasl}}^2)$$

Ahora examinemos:

Los primeros términos de cada uno suman para formar $\frac{1}{2}(mr_1^2 + mr_2^2)\omega^2$, la cual es la energía cinética rotacional.

Los últimos términos de cada uno suman para formar $\frac{1}{2}mv_{\text{trasl}}^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{trasl}}^2$, la cual es la energía cinética traslacional total.

Los términos de en medio de cada uno suman para formar $\frac{1}{2}(2m)\omega v_{\text{trasl}}(-r_1 + r_2)$. Observe que si y solo si el cuerpo gira alrededor del centro de masa, $r_1 = r_2$, y los términos se cancelan.

Solo si los términos de en medio se cancelan, es decir, *solo si la rotación es alrededor de un eje que pase por el centro de masa,*

$$K_{\text{total}} = K_{\text{trasl}} + K_{\text{rot}}$$

Resumen y conclusiones

Un eje de rotación que no pase por el centro de masa debe ser un eje forzado. Solo si la rotación es alrededor de un eje que pase por el centro de masa puede separarse la energía cinética rotacional de la traslacional.

5. Teorema de ejes paralelos

Supongamos que tenemos un cuerpo general como el de la fig. 6, que rota alrededor del eje z, que además pasa por el centro de masa y en la figura llamamos C. Entonces, el momento de inercia alrededor del eje C es

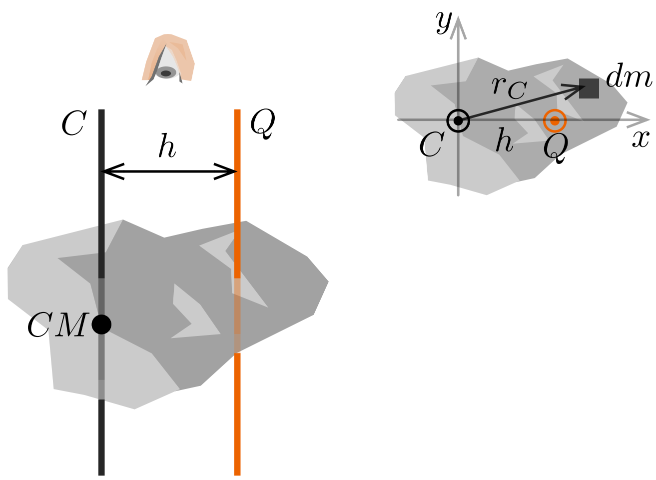

Figura 6: Teorema de ejes paralelos

$$I_C = \int r_C^2 dm = \int (x_C^2 + y_C^2) dm$$

Ahora bien, supongamos que movemos el eje de rotación, a un eje Q. El momento de inercia alrededor del nuevo eje será

$$I_Q = \int (x_C + h)^2 dm + \int y_C^2 dm$$

desarrollando,

$$I_Q = \int x_C^2 dm + 2h \int x_C dm + h^2 \int dm + \int y_C^2 dm$$

Ahora, veamos la integral $\int x_C dm$. La definición del centro de masa es $Mx_C = \int x dm$, por lo que la integral en cuestión es en realidad $\int x_C dm = M(x_C)_C$, es decir, la posición del centro de masa respecto al centro de masa, por lo que esa integral es *cero*.

Por lo tanto, los términos que sobreviven son

$$I_Q = \int x_C^2 dm + h^2 \int dm + \int y_C^2 dm$$

$$\implies I_Q = \int r_C^2 dm + h^2 M$$

y nos queda el **teorema de ejes paralelos**:

$$I_Q = I_C + Mh^2$$

Resumen y conclusiones

Hemos demostrado que los momentos de inercia alrededor dos ejes paralelos, uno de los cuales que pasa por el centro de masa del objeto se pueden relacional mediante el teorema de ejes paralelos. Hay que evitar caer en la confusión, sin embargo, de que el teorema de ejes paralelos sirve para dos ejes cualquiera. Solo sirve si el eje C pasa por el centro de masa, pues es el único donde la integral $\int x_C dm$ se hace cero por la definición de centro de masa. Si tuviéramos que relacionar el momento de inercia de dos ejes paralelos cualquiera, primero se debe usar el teorema para hallar a partir del primer eje el momento de inercia alrededor del centro de masa, y luego use puede usar ese para volver a aplicar el teorema de ejes paralelos para el segundo eje.