TEC | Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Física

física general I

CÁLCULO DE CENTRO DE MASA Y MOMENTO DE INERCIA

Autores: MSc. André Oliva

Editores:

versión 1.0

A. Preliminares

I. Dimensión de un objeto

Veamos la figura 1. En ella se muestran tres formas: una "cuerda", una especie de "bandera" y un cilindro relleno. ¿Cuántas dimensiones tiene cada figura? Es tentador pensar que las tres figuras son tridimensionales, porque lo cierto es que las tres necesitan un espacio tridimensional para poder dibujarlas. Sin embargo, si consideramos la cuerda como muy delgada, y colocamos a una hormiga sobre ella, nos podemos preguntar: ¿en cuántas direcciones se puede mover la hormiga? La respuesta es que se puede mover hacia adelante y hacia atrás, solamente (la cuerda es infinitesimalmente delgada), por lo que dicha cuerda se considera como *unidimensional*. Si ahora repetimos el experimento con la bandera, que podemos pensar que no tiene grosor, vemos que la hormiga ahora se puede mover en dos direcciones distintas, por lo que se puede considerar como *bidimensional*. Por último, si consideramos nuestro cilindro relleno, por ejemplo de agua, y nos preguntamos que en cuántas direcciones distintas puede nadar la hormiga, la respuesta es que en tres: en ese caso tenemos una figura *tridimensional*.

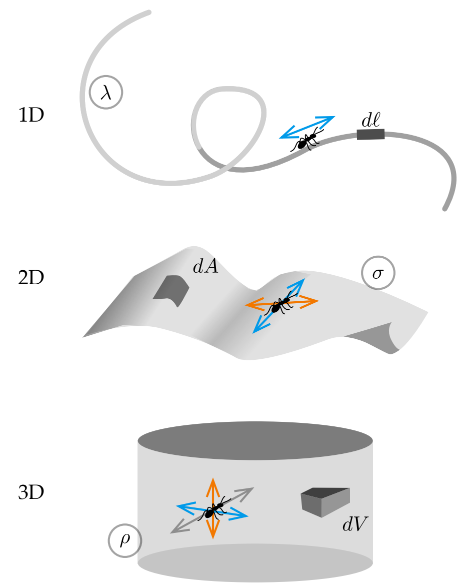


Figura 1: Determinación de la dimensión de un objeto

II. Densidades y diferenciales

Para objetos unidimensionales, definiremos la **densidad lineal de masa** λ:

$$\lambda = \frac{dm}{d\ell} \tag{1}$$

donde dm es un *diferencial de masa*, es decir, la masa de una porción muy pequeña del objeto unidimensional (en la figura 1, una cuerda), y $d\ell$ es el *diferencial de longitud*, es decir, la longitud de esa porción pequeña de cuerda, medida a lo largo de la misma.

Para objetos bidimensionales, tenemos la **densidad superficial de masa**, σ:

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \tag{2}$$

donde dA es un *diferencial de área*, es decir, una parte infinitesimalmente pequeña de la superficie del objeto.

Por último, para objetos tridimensionales, tenemos la **densidad volumétrica de masa**, la cual probablemente usted ya conoce, la cual se define como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{3}$$

donde dV es el *diferencial de volumen*, es decir, una porción infinitesimalmente pequeña del volumen del objeto.

Para integrar a lo largo de una cuerda, hay que hacer que la hormiga recorra la única dirección en la que puede recorrerla. Para integrar en una bandera, sin embargo, hay que hacer dos integrales, una para cada dirección en la que puede recorrerla la hormiga. Por último, para integrar en el cilindro lleno de agua, hay que hacer tres integrales, también, una para cada dirección diferente donde puede moverse la hormiga.

III. Masa de un cuerpo a partir de su densidad

A continuación haremos dos ejemplos sobre la determinación de la masa de un cuerpo a partir de la densidad.

a. Placa triangular de densidad constante

En la figura 2a, se muestra una placa triangular de densidad constante y uniformemente distribuida σ. Encontremos su masa total.

Solución: Para calcular la masa total, recordamos que

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \implies m = \int \sigma dA$$

pero como la densidad es uniforme, σ sale de la integral, y tendremos

$$m = \sigma \int dA = \sigma A = \sigma \frac{ab}{2}$$

Es decir, *solo si* tenemos una densidad de masa *constante*, se cumple que

$$\lambda = \frac{dm}{d\ell} = \frac{m}{L} \tag{4}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{m}{A} \tag{5}$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V} \tag{6}$$

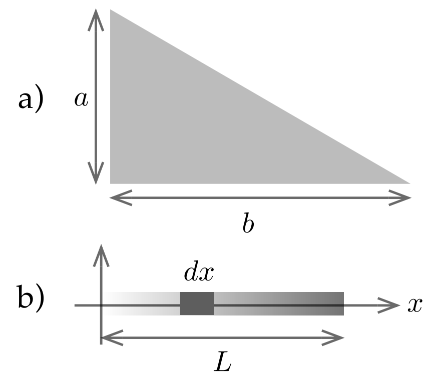


Figura 2: a) Placa triangular de densidad constante. b) Barra de densidad variable

b. Barra de densidad variable

Imaginemos que tenemos una barra recta de longitud L, de densidad variable descrita por la función $\lambda = Cx$, donde C es una constante dada. Dos preguntas: a) ¿Qué unidades debe tener C? b) ¿Cuál es la masa total de la barra?

Solución:

a) Como las unidades de λ son $\mathrm{kg/m}$, y las unidades de x son m, esto significa que las unidades de η deben ser $\mathrm{kg/m^2}$.

b) Para la masa total de la barra, vamos a utilizar la definición de λ:

$$\lambda = \frac{dm}{d\ell} \implies m = \int \lambda d\ell$$

Ahora bien, $d\ell$ es un pedazo de longitud de la barra, medido a lo largo de la misma. Como la barra está orientada con el eje x, el pedazo de barra será $d\ell := dx$. Además, ahora λ ya no es constante, por lo que debemos sustituir el criterio de la función:

$$m = \int \lambda dx = \int C x dx$$

Ahora, debemos establecer los límites de integración. Para ello debemos preguntarnos: ¿de dónde a dónde va la barra? Al fijarnos en la figura 2b, concluimos que la barra va desde $x = 0$ hasta $x = L$, que también podemos escribir como $0 < x < L$.

$$\Longrightarrow m = \int_0^L C x dx = C \int_0^L x dx = C \frac{x^2}{2} \bigg|_0^L = C \frac{L^2}{2}$$

Verificamos las unidades: como las unidades de C son $\mathrm{kg/m^2}$, al multiplicar por $\mathrm{m^2}$, se obtienen kg, que es la unidad de la masa.

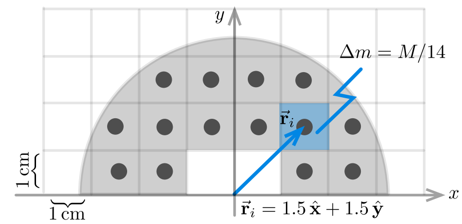
B. Cálculo del centro de masa

Recordamos la definición de la posición del centro de masa para objetos continuos:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}dm \tag{7}$$

Hay que separar la integral por cada coordenada:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int xdm \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int ydm \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int zdm$$



La visión computacional: La idea general es dividir la figura en pedazos pequeños. En el ejemplo de arriba, la figura se ha dividido en 14 partes iguales, de masa $\Delta m = M/14$, o bien, si tenemos la densidad superficial de masa, σ, la masa de cada cuadrito es $\Delta m = \sigma \Delta A$. Calculamos además la posición de cada pedazo, y luego aplicamos la ecuación

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \Delta m$$

Cuantos más pedazos tenga la división de la figura original, más exacto será el resultado. Este procedimiento se puede realizar de forma automática con un programa o una hoja de cálculo.

I. Objetos unidimensionales

a. Barra

Para una barra de longitud L y masa M como la de la figura, podemos encontrar el centro de masa si consideramos una porción infinitesimalmente pequeña de su longitud, dx. La posición de esta pequeña porción es x, y la barra va de $0 < x < L$.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm$$

Entonces, como ya sabemos, no podemos integrar x respecto a dm, por lo que

$$dm = \lambda dx$$

Vamos a suponer que $\lambda = $ const en toda la barra. También debemos recordar que $\lambda = M/L$. Entonces,

$$x_{CM} = \int_0^L \frac{1}{M} x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda}{M}\frac{L^2}{2}$$

o bien, sustituyendo la densidad,

$$x_{CM} = \frac{M}{ML}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

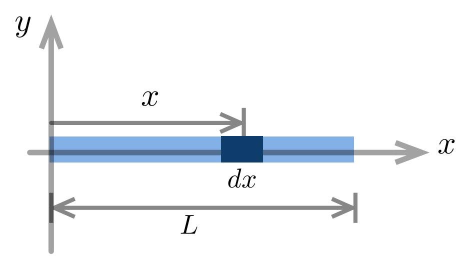


Figura 3: Barra

b. Medio anillo

El medio anillo de la figura 4 es unidimensional, por lo que hay que utilizar la densidad lineal de masa y un elemento de longitud a lo largo del arco, pero necesita dos dimensiones para representarse. Eso significa que habrá ahora dos integrales: una para la posición del centro de masa en x, y otra para la posición del centro de masa en y.

$$x = R\cos\theta; \quad y = R\sin\theta$$

$$dm = \lambda ds$$

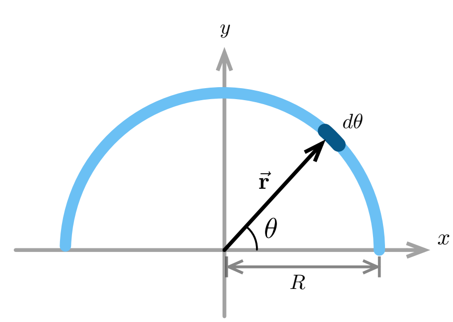


Figura 4: Medio anillo

En general, un arco es radio por el ángulo, por lo que un arco pequeñito ds es el radio por el ángulo pequeñito $d\theta$:

$$ds = Rd\theta$$

El anillo va $0 < \theta < \pi$.

La densidad lineal de masa es constante en este ejercicio, por lo que es igual a la masa total entre la longitud total de la semicircunferencia:

$$\lambda = \frac{M}{\pi R}$$

Antes de continuar, vamos a tener en cuenta las siguientes integrales:

$$\int_0^\pi \cos\theta d\theta = \sin\theta|_0^\pi = 0$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\cos\theta|_0^\pi = 2$$

1. Posición en x del centro de masa

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_0^\pi (R\cos\theta)\lambda Rd\theta = \frac{\lambda}{M}R^2\int_0^\pi \cos\theta d\theta = 0$$

Este resultado es de esperarse, pues en la dirección x, hay igual materia del lado izquierdo que del derecho, por lo que por simetría el centro de masa debía estar sobre el eje y.

2. Posición en y del centro de masa

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int ydm = \frac{1}{M}\int_0^\pi (R\sin\theta)\lambda Rd\theta = \frac{\lambda}{M}R^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta$$

lo que implica

$$y_{CM} = \frac{\lambda}{M}R^2\cdot 2 = \frac{M}{\pi RM}R^2\cdot 2 = \frac{2R}{\pi}$$

II. Objetos bidimensionales

Hay que hacer dos integrales por coordenada, una por cada dimensión. Esto se puede hacer de la siguiente manera: se divide la figura en muchos objetos unidimensionales. Se saca el centro de masa del objeto unidimensional y luego se integra para obtener la figura bidimensional original.

a. Triángulo rectángulo

Considere un triángulo rectángulo de base a y altura b, como se muestra en la figura 5. Vamos a sacar el centro de masa.

La ecuación de la recta que determina el triángulo es: $y(x) = (b/a)x$. Dividimos en pequeños rectángulos de altura y y base dx.

1. Posición en x del centro de masa

1.1. Primera integral: centro de masa de un rectángulo

Como el rectángulo es unidimensional, y está orientado verticalmente, la coordenada x de su centro de masa está en su misma posición x.

$$x_{\text{CM,rect}} = x$$

1.2. Segunda integral: suma de los rectángulos

Ahora, vamos a utilizar el resultado anterior para sumar rectángulos hasta formar el triángulo, siempre solo enfocándonos en la coordenada en x. Como el resultado de la integral 1.1 dio simplemente x, tendremos que

$$dx_{\text{CM,triang}} = \frac{1}{M} x_{\text{CM,rect}} dm = \frac{1}{M} x dm$$

donde dm ahora es un rectángulo (base dx y altura y), y la densidad que corresponde ahora es la de área (σ, que es la masa dividida entre toda el área, $ab/2$):

$$dm = \sigma y dx = \frac{2M}{ab} y dx$$

Introducimos esto en la integral, viendo además que el triángulo va en x desde $x = 0$ hasta $x = a$:

$$x_{\text{CM,triang}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int x \left(\frac{2M}{ab} \right) y dx = \frac{2}{ab} \int_0^a x y dx$$

no podemos integrar y respecto a x así no más. Tenemos que expresar y en función de x. Para eso usamos la ecuación de la recta:

$$x_{CM} = \frac{2}{ab} \int_0^a x \left(\frac{b}{a} x \right) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3} a$$

2. Posición en y del centro de masa

2.1. Primera integral: centro de masa de un rectángulo

Sabemos que la posición en y del centro de masa del rectángulo vertical es $y/2$, es decir,

$$y_{\text{CM,rect}} = \frac{y}{2}$$

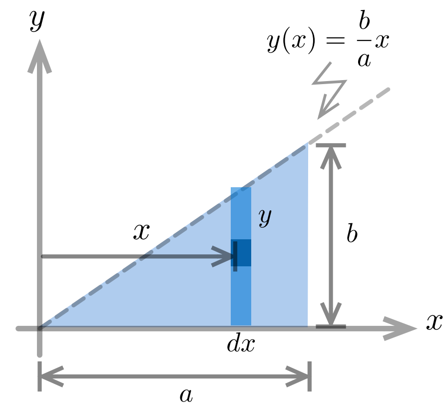


Figura 5: Triángulo rectángulo

2.2. Segunda integral: suma de los rectángulos

Ahora, vamos a sumar cada rectángulo hasta formar el triángulo. Para ello, escribimos de forma infinitesimal:

$$dy_{\text{CM,triang}} = \frac{1}{M} y_{\text{CM,rect}} dm$$

Como cada centro de masa de cada rectángulo está en $y/2$,

$$dy_{\text{CM,triang}} = \frac{1}{M}\frac{y}{2} dm$$

donde nuevamente expresamos dm como un pequeño rectángulo

$$dm = \sigma y dx = \frac{2M}{ab} y dx$$

con lo que

$$y_{\text{CM,triang}} = \int \frac{1}{M}\frac{y}{2}\left(\frac{2M}{ab}\right) y dx$$

simplificando,

$$y_{CM} = \int \frac{y^2}{ab} dx$$

sustituyendo $y(x)$ (nuevamente la variable de integración queda x; recordemos que el triángulo va en $0 < x < a$),

$$y_{CM} = \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{ab}\int_0^a x^2 dx = \frac{b}{3}$$

Por lo que el centro de masa se encuentra en

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{2}{3} a\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{3}\,\hat{\mathbf{y}}$$

En general, se puede utilizar este procedimiento para calcular el centro de masa de cualquier figura cuya función $y(x)$ sea conocida.

b. Cuarto de disco

Hay varias formas de hacer este problema. Una de ellas sería seguir el procedimiento del triángulo, pero esto se alarga bastante. Para aprovechar la simetría del problema, usaremos coordenadas polares, tal y como lo hicimos con el medio anillo.

Vamos a calcular solamente la coordenada x del centro de masa, porque por simetría, la coordenada y debería dar igual.

La pregunta es que cómo dividiríamos la figura, que es bidimensional, primero en objetos unidimensionales, y luego en partículas, utilizando coordenadas polares. Vamos a hacer dos métodos: la división en segmentos anulares, y la división en segmentos radiales triangulares. Veremos que el método de división en segmentos anulares es el más fácil para hacer desde cero, y es el que se recomienda estudiar. El segundo

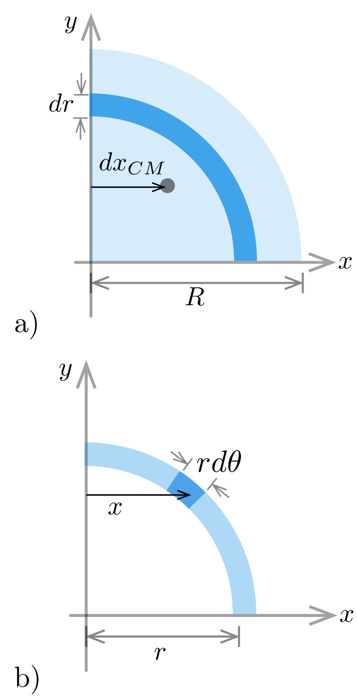


Figura 6: a) Cuarto de disco. b) Cuarto de anillo

método está allí solo por referencia, para demostrar que sí es posible hacerlo también así.

Método 1: división en segmentos anulares

1.1. Primera integral: centro de masa de un segmento anular

Nos concentramos en la figura 6b. Como solo vamos a calcular la coordenada en x, todo se simplificará bastante. Planteamos el centro de masa del segmento, que encontraremos dividiendo en partículas:

$$x_{\text{CM,seg}} = \frac{1}{M}\int x dm$$

Recordando el caso del medio anillo, planteamos el diferencial de masa (eso sí, para el caso de λ, recordamos que es la masa entre el *cuarto* de circunferencia)

$$dm = \lambda r d\theta = \frac{M}{(\pi/2)r} r d\theta$$

y $x = r\cos\theta$. En un segmento anular, r es constante, por lo que sale de la integral:

$$\begin{aligned} \implies x_{\text{CM,seg}} &= \frac{1}{M}\int r\cos\theta\left(\frac{2M}{\pi r}\right) r d\theta \\ &= \frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{2r}{\pi}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

Este es el mismo resultado que habíamos obtenido para la coordenada y del medio anillo.

1.2. Segunda integral: suma de segmentos anulares

De la integral anterior, sabemos que

$$dx_{\text{CM,total}} = \frac{1}{M} x_{\text{CM,seg}} dm = \frac{1}{M}\frac{2r}{\pi} dm$$

con

$$dm = \sigma dA$$

Ahora bien, ¿quién es dA? La respuesta es simple. El segmento anular tiene ahora un grosor, dr. Suponga que estiráramos el segmento anular hasta formar un rectángulo. El área del diferencial es el área del rectángulo, base por altura. La base del segmento anular es su arco, $\pi R/2$. La altura el el ancho del segmento, dr. Por su parte, $\sigma =$ masa total/área del cuarto de disco. Entonces,

$$dm = \sigma(\text{arco})(\text{ancho del segmento}) = \left(\frac{4M}{\pi R^2}\right)\frac{\pi}{2} r dr$$

Sustituimos todo y finalmente encontramos

$$\implies x_{CM} = \frac{1}{M}\frac{4M}{\pi R^2}\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^R r^2 dr = \frac{4}{R^2\pi}\frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

2. Segundo método: división en segmentos radiales

Para comparar, también incluimos cómo habría sido el procedimiento si hubiésemos dividido el cuarto de disco en segmentos radiales, como trozos de un pastel. Para simplificar, cada trozo es un triángulo rectángulo de base R y altura $Rd\theta$. Como la altura es infinitesimal, el trozo se comporta como un objeto unidimensional.

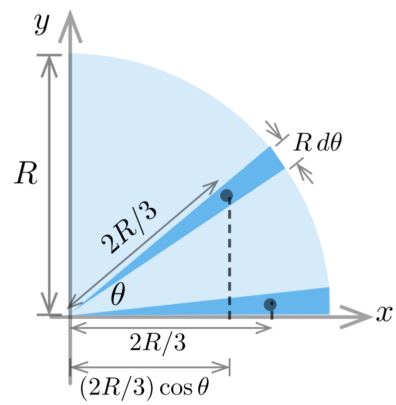


Figura 7: Cuarto de disco: división en segmentos radiales

Primera integral: centro de masa de un triángulo rectángulo

Ya hicimos ese ejercicio, y como resultado obtuvimos que en la única dimensión de nuestro segmento, el centro de masa se encuentra a $x = 2a/3$.

Segunda integral: suma de triángulos

Sabemos que la posición en x del centro de masa de un triángulo en general, inclinado un ángulo θ, como se encuentra en la figura, es $x = (2R/3)\cos\theta$. Además, el diferencial de masa es ahora el del triángulo infinitesimal,

$$dm = \sigma dA = \left(\frac{4M}{\pi R^2}\right)\frac{R^2 d\theta}{2}$$

(la base es R, la altura es $Rd\theta$ y el área es base $\times$ altura/2)
Con esto,

$$dx_{\text{CM,total}} = \frac{1}{M}x_{\text{CM,segmento}}dm = \frac{1}{M}\frac{2R}{3}\cos\theta dm$$

$$\implies x_{CM} = \frac{1}{M}\frac{2R}{3}\int \cos\theta\frac{4M}{\pi R^2}\frac{R^2}{2}d\theta$$

$$= \frac{4R}{3\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

Los resultados son iguales, pero obviamente el procedimiento de dividir en pequeños segmentos anulares fue más sencillo.

C. Cálculo del momento de inercia

La definición del momento de inercia es

$$I = \int r^2 dm \tag{8}$$

donde r es la distancia *hasta el eje de rotación*, **no** *hasta el origen*.

Como vemos, no podemos integrar r respecto a m. Por ello, casi siempre nos veremos obligados a hacer un cambio de variable, utilizando las definiciones de las densidades, ecuaciones (1), (2) y (3), y además, si la densidad de masa es constante, también podremos utilizar las ecuaciones (4), (5) y (6).

I. Objetos unidimensionales

Para objetos unidimensionales, hay que hacer una integral solamente, a lo largo del objeto. Se divide el objeto en partículas, y se utiliza la densidad lineal de masa.

a. Barra alrededor de un eje perpendicular a un extremo

Calcularemos a continuación el momento de inercia de la barra de la figura 8, considerando que la densidad de masa es uniforme.

De forma infinitesimal, planteamos el momento de inercia de una partícula:

$$dI = r^2 dm$$

donde r es la distancia entre el eje de rotación y el elemento de masa dm, que en nuestro caso, y de acuerdo a la figura, correspondería a x. La barra ocupa el intervalo $0 < x < L$. Además, en este caso, la densidad lineal de masa de la barra es constante:

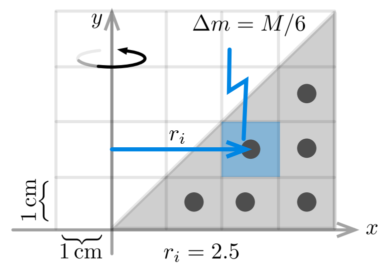
$$dm = \lambda dx; \quad r := x; \quad \lambda = M/L$$

Única integral: x:

$$I = \int x^2 dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3} M L^2$$

II. Objetos bidimensionales

Hay que hacer dos integrales por coordenada, una por cada dimensión. Para mayor facilidad, esto se puede hacer de la siguiente manera: primero, se coloca correctamente en la figura el r (distancia al eje de rotación). Luego, se divide la figura en muchos objetos unidimensionales de modo que en cada figura tenga r constante. Se



La visión computacional: La idea general es dividir la figura en pedazos pequeños. En el ejemplo de arriba, la figura se ha dividido en 6 partes iguales, de masa $\Delta m = M/14$, o bien, si tenemos la densidad superficial de masa, σ, la masa de cada cuadrito es $\Delta m = \sigma \Delta A$. Medimos ahora la distancia r_i de cada pedazo hasta el eje de rotación, y luego aplicamos la ecuación

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m$$

Cuantos más pedazos tenga la división de la figura original, más exacto será el resultado. Este procedimiento se puede realizar de forma automática con un programa o una hoja de cálculo.

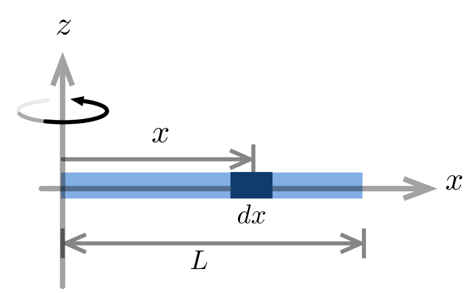


Figura 8: Momento de inercia de una barra

saca el momento de inercia del objeto unidimensional y se integra para obtener el momento de inercia de la figura completa.

a. Placa rectangular alrededor de un eje que coincide con un lado

Consideremos la placa que se encuentra en la figura 9a. Observemos que la distancia al eje de rotación se puede señalar con la coordenada x. Entonces, según la regla que hemos visto, conviene dividir la figura en barras verticales, de forma que la distancia al eje de rotación sea constante (en todo momento la barra vertical se encuentra a la misma distancia x del eje z).

Primera integral: barra alrededor del eje z

Necesitamos el momento de inercia de una barra que gira alrededor de el eje z. Para ello podremos aplicar el teorema de ejes paralelos, y así nos evitamos hacer una integral. Para una barra infinitesimal girando alrededor de su propio eje que pasa por su centro de masa, $I_{CM} = 0$. Esto se debe a que la distancia de cualquier partícula que forme la barra (ver figura 9b), se encuentra a una distancia 0 del eje de rotación.

Eso significa que, de acuerdo al teorema de ejes paralelos,

$$I = I_{CM} + mx^2 = mx^2$$

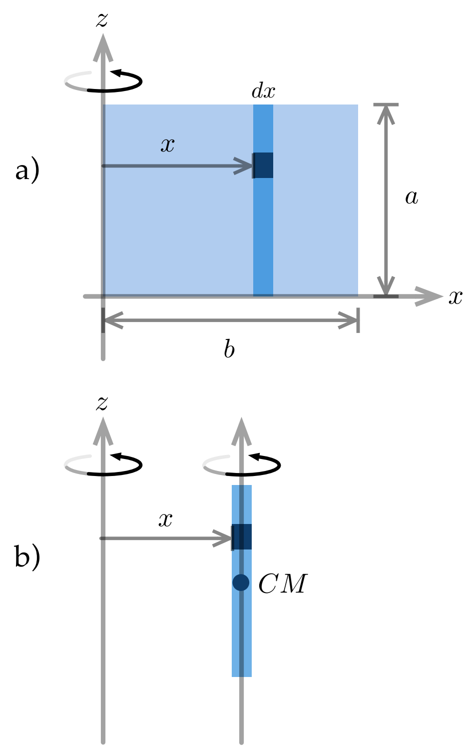


Figura 9: Momento de inercia de una placa rectangular

Segunda integral: suma de barras

Ya que tenemos la primera integral, para hacer la segunda, escribimos el resultado de la primera en forma diferencial:

$$dI = x^2 dm$$

Pero ahora el diferencial de masa es toda la barra (cuya área es adx), que va formando la placa:

$$dm = \sigma dA = \sigma adx = \frac{M}{ab} adx$$

Ahora integramos, recordando que la placa se extiende desde $x = 0$ hasta $x = b$:

$$\implies I = \int x^2 dm = \int_0^b x^2 \left(\frac{M}{ab}\right) adx = \frac{M}{b}\int_0^b x^2 dx = \frac{M}{b}\frac{b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

b. Disco (y anillo) alrededor de un eje perpendicular a su plano, que pasa por su centro

Identificamos r en el diagrama; coincide con el r de coordenadas polares. $r =$ const en ese caso es un anillo.

Primera integral: anillo

El diferencial es un diferencial de arco, y la densidad es constante, por lo que es la masa total entre la longitud de arco total (circunferencia):

$$dm = \lambda r d\theta = \frac{M}{2\pi r} r d\theta$$

Ahora introducimos todo en la integral, y establecemos que el anillo va desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$:

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} r^2 \frac{M}{2\pi} d\theta \\ &= r^2 \frac{M_{\text{anillo}}}{2\pi} 2\pi = M_{\text{anillo}} r^2 \end{aligned}$$

Segunda integral: disco

A partir del resultado de la primera integral, escribimos el resultado de forma diferencial:

$$dI = r^2 dM$$

Ahora el diferencial de masa es el anillo, cuya área la podemos determinar imaginándonos que cortamos ese anillo y lo estiramos en una mesa: queda un rectángulo de base $2\pi r$ y altura dr. La densidad de masa de nuevo es uniforme e igual a la masa total del disco entre el área total del disco:

$$dM = \sigma 2\pi r dr = \frac{M_{\text{disco}}}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 \frac{M_{\text{disco}}}{\pi R^2} 2\pi r dr = \int_0^R r^3 \frac{2M}{R^2} dr \\ &= \frac{2M_{\text{disco}}}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{M_{\text{disco}} R^2}{2} \end{aligned}$$

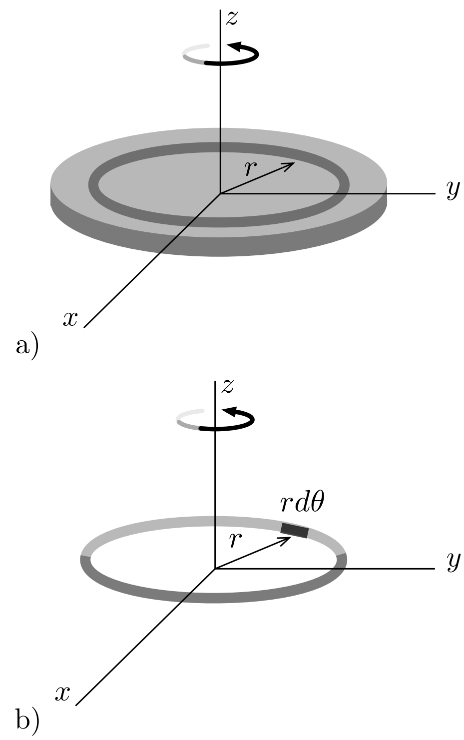


Figura 10: a) Momento de inercia del disco. b) Momento de inercia del anillo

III. Cascarones o sólidos de revolución

Se divide la figura en anillos o discos, según sea el caso, y se expresa su forma en términos de la variable de integración.

a. Cascarón esférico

Calcularemos el momento de inercia de un cascarón esférico, alrededor de un eje que pasa por su centro de masa.

Para evitar confusiones con los nombres de las variables, usamos ℓ como la distancia al eje de rotación. De la figura, se observa que $\ell = R \sin\theta$. R está dirigido radialmente hacia afuera en todas partes, y no solo en el plano xy.

Primera integral: anillo alrededor del eje z

Según el ejercicio anterior, el resultado dio $I_{\text{anillo}} = m\ell^2$.

Segunda integral: suma de anillos

$$dI = \ell^2 dm$$

donde $dm = \sigma dA = \sigma(\text{circunf.})(\text{ancho del anillo})$. El ancho del anillo es $Rd\theta$ (ver figura), y $\sigma = M/(4\pi R^2)$.

$$\begin{aligned} I &= \int \ell^2 \left(\frac{M}{4\pi R^2}\right) 2\pi\ell R d\theta \\ &= \frac{MR^2}{2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \end{aligned}$$

observe que el ángulo θ se extiende desde 0 hasta π únicamente, pues el anillo cubre "la otra mitad" de la esfera. La integral la podemos hacer así:

$$\int sin^2 \sin\theta d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \int (1-u^2)du$$

con la sustitución $u = \cos\theta$. Con esto, la integral da 4/3, con lo que el momento de inercia queda

$$I = \frac{MR^2}{2}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}MR^2$$

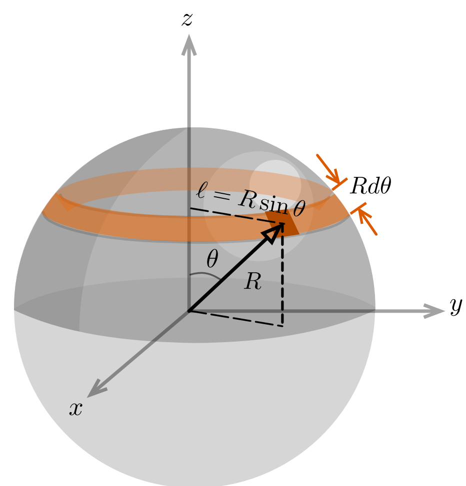


Figura 11: Momento de inercia de un cascarón esférico

b. Cono sólido

La primera integral es un anillo, la segunda es un disco, por lo que $I_{\text{disco}} = mr^2/2$.

Tercera integral: suma de discos

$$dI = \frac{r^2}{2}dm$$

con $dm = \rho dV$, y $dV = \text{área disco} \times \text{altura} = \pi r^2 dz$, y $\rho = M/V = 3M/(\pi R^2 h)$

$$\begin{aligned} \implies I &= \int \frac{r^2}{2}\left(\frac{3M}{\pi R^2 h}\right)\pi r^2 dz \\ &= \frac{3M}{2R^2 h}\int r^4 dz \end{aligned}$$

Ahora, r no es constante con z. Según la figura inferior, podemos encontrar la ecuación de la recta como

$$z(r) = -\frac{h}{R}r + h \implies r(z) = R - \frac{R}{h}z$$

con lo que

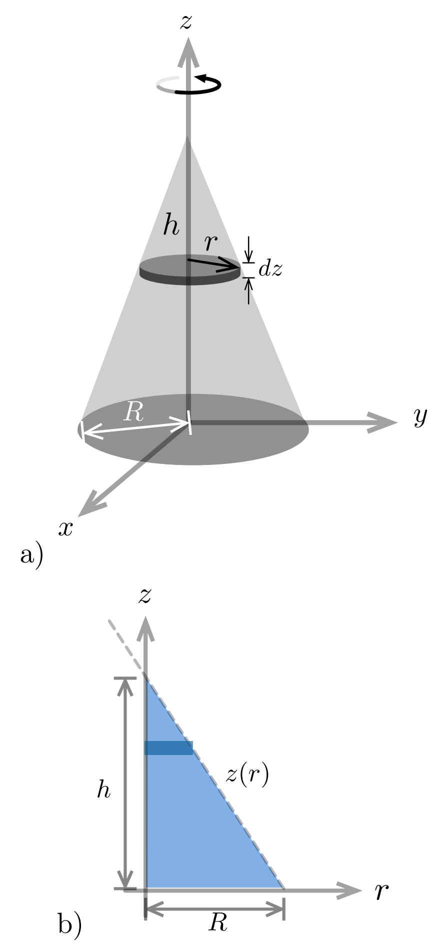


Figura 12: Momento de inercia de un cono sólido

$$I = \frac{3M}{2R^2h}\int_0^h \left(R - \frac{Rz}{h}\right)^4 dz$$

sea $u = R - Rz/h \implies du = -Rdz/h$. Entonces,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3M}{2R^2h}\int_{\dots}^{\dots} u^4 \frac{h}{R} du \\ &= -\frac{3M}{2R^2h}\frac{h}{R}\left.\frac{u^5}{5}\right|_{\dots}^{\dots} = -\frac{3M}{10R^3}\left.\left(R - \frac{Rz}{h}\right)^5\right|_0^h \\ &= \frac{3M}{10R^3}R^5 = \frac{3MR^2}{10} \end{aligned}$$